МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

ТЕОРІЯ ПОЛЯ

Навчальний посібник
для студентів технічних спеціальностей
усіх форм навчання
вищих навчальних закладів

Рекомендовано
редакційно-видавничою
радою університету,
протокол № 3 від 06.11.19 р.

Харків
НТУ «ХПІ»
2019

УДК 517.91
П 134

Рецензенти:

Ю.І.Першина, д-р фіз.-мат. наук, проф. УІПА

Н.О.Чікіна, канд. техн. наук, проф. НТУ «ХПІ»

Полянська Т.С.

П 134 Теорія поля: навч.-метод. посіб./ Полянська Т. С., Чорна О. С. – Харків : НТУ ХПІ», 2019. – 76 с.

Навчально-методичний посібник містить детально роз'яснені методи розв'язання типових задач за темою «Теорія поля» і завдання для контрольної роботи.

Призначено для студентів технічних спеціальностей.

Іл. 11. Бібліогр.: 5 назв.

УДК 517.91

ВСТУП

Теорія поля, як окрема тема в курсі вищої математики, має велике значення в математичній освіті інженера. Особливо необхідно знання основ теорії поля інженеру-енергетику.

Навчально-методичний посібник з курсу вищої математики «Теорія поля» ставить за мету допомогти студентам в засвоєнні основних понять, що вивчаються в цьому розділі математики, а також у набуті ними практичних навичок у вирішенні завдання.

У даному посібнику подано основні означення за темою «Теорія поля», причому велика увага звернена на фізичний зміст даних понять, детально розібрані методи розв’язання типових задач. Зміст посібника повністю відповідає програмі з вищої математики для студентів технічних спеціальностей НТУ «ХПІ».

Навчально-методичний посібник складається з двох розділів: «Скалярне поле» і «Векторне поле» і, крім того, містить завдання для контрольної роботи.

Посібник може бути корисним також студентам, які вивчають теорію поля самостійно. Для полегшення самостійної роботи в кінці подано список рекомендованої літератури [1–5], в якій студенти можуть знайти відповіді на свої запитання і докладний розв’язок типових задач.

1. СКАЛЯРНЕ ПОЛЕ

1.1. Означення скалярного поля та приклади скалярних полів

Означення. *Якщо в області* D *двовимірного або тривимірного простору визначена деяка скалярна функція* $U(M)=U(x,y)$ *або, відповідно,* $U(M)=U(x,y,z)$*, то кажуть, що в області* D *задано скалярне поле* $U(M)$.

Якщо функція $U(M)=U(x,y)$ визначена в області D двовимірного простору, то поле $U(M)$ називається *плоским*.

Якщо функція $U(M)$ не залежить від часу, то скалярне поле називається *стаціонарним*. Скалярне поле, яке з часом змінюється, називається *нестаціонарним*.

Ми обмежимося вивченням стаціонарних полів, причому таких полів, у яких функція $U(x,y)$ або, відповідно, $U(x,y,z)$, неперервна і має неперервні частинні похідні по всім змінним до необхідного порядку.

Приклади скалярних полів

а) Плоскі поля

Плоскі поля розглядаються, наприклад, в метеорології: поле температур в даний момент часу на поверхні землі, поле тисків і так далі.

б) Поле щільності маси

Об'ємною щільністю маси m в точці M називають величину $\rho(M)$, обумовлену співвідношенням

$$\rho(M) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V},$$

де $\Delta V -$ обсяг області Δv простору, всередині якого лежить точка M, причому $\Delta V \to 0$ так, що Δv стягується до точки M; $\Delta m -$ кількість маси, що міститься в області Δv.

Якщо щільність $\rho(M)$ визначена в кожній точці області v, то функція $\rho(M)$ утворює в цій області скалярне поле, яке зветься полем щільності маси.

в) Поле щільності заряду

У теоретичних основах електротехніки розглядають:

1. Скалярне поле об'ємної щільності $\rho(M)$ електричного заряду, яке визначається в точках M розглянутої області співвідношенням

$$\rho(M) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta V},$$

де $\Delta q -$ кількість електричного заряду, що міститься в області Δv, всередині якої лежить точка M; $\Delta V \to 0$ так, що Δv стягується до точки M.

2. Скалярне поле поверхневої щільності $\sigma(M)$ електричного заряду, яке визначається в точках M розглянутої поверхні s співвідношенням

$$\sigma(M) = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta S},$$

де ΔS – площа частини Δs поверхні s, точка M лежить всередині Δs; Δq – кількість електричного заряду, що міститься на поверхні Δs; $\Delta S \to 0$ так, що Δs стягується до точки M.

1.2. Поверхні рівня скалярного поля

Нехай в області D тривимірного простору задано скалярне поле $U(M) = U(x, y, z)$.

Означення. *Геометричне місце точок області D, в яких функція $U(x, y, z)$ має одне і те ж значення, утворює деяку поверхню, яка називається поверхнею рівня (або еквіпотенційною поверхнею) розглянутого скалярного поля.*

Звідси випливає, що рівняння поверхні рівня має вигляд $U(x, y, z) = C$, де $C \equiv \text{const}$, причому кожному значенню константи C відповідає своя поверхня рівня. Таким чином, через кожну точку (x_0, y_0, z_0) даної області проходить, причому тільки одна, поверхня рівня, що відповідає значенню константи $C_0 = U(x_0, y_0, z_0)$. Тобто вся область D заповнена цими поверхнями і, очевидно, поверхні рівня не перетинаються.

У разі плоского поля поняття поверхні рівня замінюється поняттям *лінії рівня*. Прикладами таких ліній можуть служити ізобари, що наносяться на карти (лінії рівних тисків) і ізотерми (лінії рівних температур).

Приклад 1.1. Знайти лінії рівня скалярного поля $U(x, y) = x + y^2$.

Розв'язання. Рівняння ліній рівня має вигляд $x + y^2 = C$ або $y^2 = -x + C$.

Відповідь: лінії рівня – параболи $y^2 = -x + C$.

Приклад 1.2. Знайти лінії рівня скалярного поля $U(x,y)=xy$.

Розв'язання. Рівняння ліній рівня має вигляд $xy=C$.

Відповідь: лінії рівня – гіперболи $xy=C$ (при $C=0-$сукупність координатних осей).

Приклад 1.3. Знайти лінії рівня скалярного поля $U(x,y)=x+y.$

Розв'язання. Рівняння ліній рівня має вигляд $x+y=C.$

Відповідь: лінії рівня – прямі $x+y=C.$

Приклад 1.4. Знайти поверхні рівня скалярного поля $U(x,y,z)=z-x^2-y^2.$

Розв'язання. Рівняння поверхонь рівня має вигляд $z-x^2-y^2=C$ або $z=x^2+y^2+C.$

Відповідь: поверхні рівня – параболоїди обертання $z=x^2+y^2+C.$

Приклад 1.5. Знайти поверхні рівня скалярного поля $U(x,y,x)=x^2+y^2-z^2.$

Розв'язання. Рівняння поверхонь рівня має вигляд $x^2+y^2-z^2=C.$

Відповідь: поверхні рівня мають рівняння $x^2+y^2-z^2=C.$ При $C>0-$ це однопорожнинні гіперболоїди, при $C<0-$ двопорожнинні гіперболоїди, при $C=0-$ конус $x^2+y^2-z^2=0.$

Приклад 1.6. Знайти поверхні рівня скалярного поля

$$U(x,y,x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Розв'язання. Рівняння поверхонь рівня має вигляд

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=C,\ \ C>0,$$

або $x^2+y^2+z^2=\frac{1}{C^2}$.

Відповідь: поверхні рівня – сфери $x^2+y^2+z^2=\frac{1}{C^2}$.

1.3. Похідна за напрямком і градієнт скалярного поля

Введемо поняття похідної функції $U(x,y,z)$ по будь-якому заданому напрямку.

Нехай M – деяка точка простору. Проведемо через точку M криву L, що має в цій точці дотичну, одиничний вектор якої позначимо через $\vec{s}^{\,0}$. (Див. рисунок 1.1).

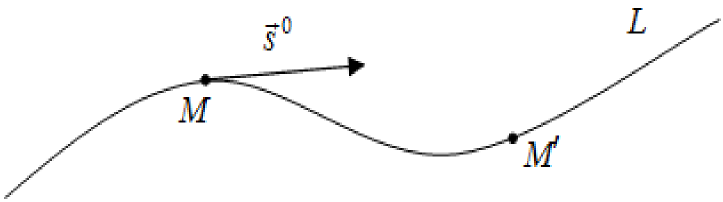

Рисунок 1.1

На кривій L виберемо точку M', сусідню з точкою M в напрямку вектора $\vec{s}^{\,0}$. Позначимо довжину дуги, що з'єднає точки M і M', через MM'.

Означення. *Границя відношення*

$$\frac{U(M)-U(M')}{MM'},$$

коли точка M' *наближується вздовж кривої* L *до точки* M, *називається похідною скалярного поля* $U(M)$ *у напрямку вектора* $\vec{s}$, *для якого* $\vec{s}^{\,0}$ *є ортом, і позначається* $\frac{\partial U(M)}{\partial s}$. *Таким чином, за означенням маємо*

$$\frac{\partial U(M)}{\partial s} = \lim_{M' \to M} \frac{U(M) - U(M')}{MM'}.$$

Похідна $\frac{\partial U(M)}{\partial s}$, знайдена для заданої точки простору і для заданого напрямку, визначає швидкість зміни скалярного поля $U(M)$ в цій точці по цьому напрямку. Відзначимо, що ця похідна є функцією не тільки точки, а й напрямку, тобто, обчислена в одній і тій же точці, але за різними напрямками, вона має, взагалі кажучи, різні значення.

Якщо $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma -$ напрямні косинуси вектора $\vec{s}$, в напрямі якого шукаємо похідну, то ця похідна обчислюється за формулою

$$\frac{\partial U(M)}{\partial s} = \frac{\partial U(M)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U(M)}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U(M)}{\partial z}\cos\gamma.$$

Приклад 1.7. Знайти похідну скалярного поля $U(x,y,z) = 2xy + xz + y^2$ в точці $M(1,-1,3)$ у напрямку до точки $N(2,1,-2)$.

Розв'язання. Напрямок $\vec{s}$, по якому шукаємо похідну, це напрямок вектора $\overrightarrow{MN} = (1,2,-5)$. Обчислимо напрямні косинуси вектора $\vec{s}$.

$$|\vec{s}| = |\overrightarrow{MN}| = \sqrt{30},$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{|\vec{s}|} = \frac{1}{\sqrt{30}}, \quad \cos\beta = \frac{2}{|\vec{s}|} = \frac{2}{\sqrt{30}}, \quad \cos\gamma = \frac{-5}{|\vec{s}|} = -\frac{5}{\sqrt{30}}\ .$$

Далі знайдемо частинні похідні функції $U\left(x,y,z\right)$ в точці $M\left(1,-1,3\right)$:

$$\left.\frac{\partial U\left(M\right)}{\partial x}\right|_{(1,-1,3)} = \left.\left(2y+z\right)\right|_{(1,-1,3)} = 1,$$

$$\left.\frac{\partial U\left(M\right)}{\partial y}\right|_{(1,-1,3)} = \left.\left(2x+2y\right)\right|_{(1,-1,3)} = 0,$$

$$\left.\frac{\partial U\left(M\right)}{\partial z}\right|_{(1,-1,3)} = \left.x\right|_{(1,-1,3)} = 1.$$

Остаточно отримуємо

$$\left.\frac{\partial U\left(M\right)}{\partial s}\right|_{(1,-1,3)} = 1\cdot\frac{1}{\sqrt{30}} + 0\cdot\frac{2}{\sqrt{30}} - 1\cdot\frac{5}{\sqrt{30}} = -\frac{4}{\sqrt{30}}\ .$$

Відповідь: $\left.\dfrac{\partial U\left(M\right)}{\partial s}\right|_{M} = -\dfrac{4}{\sqrt{30}}$.

Приклад 1.8. Знайти похідну скалярного поля $U\left(x,y,z\right) = x^2y + 2y^2z - xyz$ в точці $M\left(2,-1,1\right)$ у напрямку, що утворює з осями координат кути $\alpha = 60^{\circ}$, $\beta = 45^{\circ}$, $\gamma = 60^{\circ}$.

Розв'язання. скористаємося формулою

$$\frac{\partial U(M)}{\partial s}=\frac{\partial U(M)}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial U(M)}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial U(M)}{\partial z}\cos\gamma.$$

Знайдемо частинні похідні $U(x,y,z)$ функції в точці $M(2,-1,1)$:

$$\left.\frac{\partial U(M)}{\partial x}\right|_{(2,-1,1)}=\left.(2xy-yz)\right|_{(2,-1,1)}=-3,$$

$$\left.\frac{\partial U(M)}{\partial y}\right|_{(2,-1,1)}=\left.\left(x^2+4yz-xz\right)\right|_{(2,-1,1)}=-2,$$

$$\left.\frac{\partial U(M)}{\partial z}\right|_{(2,-1,1)}=\left.\left(2y^2-xy\right)\right|_{(2,-1,1)}=4.$$

Далі

$$\cos\alpha=\cos 60^{\circ}=\frac{1}{2},\quad \cos\beta=\cos 45^{\circ}=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \cos\gamma=\cos 60^{\circ}=\frac{1}{2}.$$

Звідси отримуємо

$$\left.\frac{\partial U(M)}{\partial s}\right|_{(2,-1,1)}=-3\cdot\frac{1}{2}-2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+4\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\sqrt{2}.$$

Відповідь: $\left.\frac{\partial U(M)}{\partial s}\right|_{(2,-1,1)}=\frac{1}{2}-\sqrt{2}.$

Означення. *Градієнтом скалярного поля* $U(M)=U(x,y,z)$ *називається вектор*

$$\operatorname{grad}U(M)=\frac{\partial U(M)}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial U(M)}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial U(M)}{\partial z}\vec{k}.$$

Приклад 1.9. Знайти градієнт скалярного поля $U(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Розв'язання. Знаходимо:

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad \frac{\partial U}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\frac{\partial U}{\partial z}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Тоді

$$\operatorname{grad}U=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\vec{i}+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\vec{j}+\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\vec{k}.$$

Відповідь: $\operatorname{grad}U=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\left(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\right).$

Приклад 1.10. Знайти кут між градієнтами скалярного поля $U(x,y,z)=x^2+2y^2-z^2$ в точках $M_1(2,3,-1)$ і $M_2(1,-1,2)$.

Розв'язання. За формулою

$$\operatorname{grad}U(M)=\frac{\partial U(M)}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial U(M)}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial U(M)}{\partial z}\vec{k}$$

обчислимо градієнти заданого скалярного поля в точках M_1 і M_2:

$$\text{grad}U(M) = 2x\vec{i} + 4y\vec{j} - 2z\vec{k},$$

$$\text{grad}U(M_1) = \text{grad}U(2,3,-1) = 4\vec{i} + 12\vec{j} + 2\vec{k}.$$

$$\text{grad}U(M_2) = \text{grad}U(1,-1,2) = 2\vec{i} - 4\vec{j} - 4\vec{k}.$$

Позначимо кут між градієнтами через φ, тоді

$$\cos\varphi = \frac{\text{grad}U(M_1)\cdot\text{grad}U(M_2)}{\left|\text{grad}U(M_1)\right|\left|\text{grad}U(M_2)\right|} = \frac{8-48-8}{\sqrt{164}\sqrt{36}} = -\frac{4}{\sqrt{41}}\ .$$

Відповідь: $\varphi = \arccos\left(-\dfrac{4}{\sqrt{41}}\right).$

Безпосередньо з визначення випливає, що *градієнт в даній точці спрямований по нормалі до поверхні рівня розглянутого скалярного поля, що проходить через цю точку*.

Нагадаємо, що пряма, перпендикулярна дотичній площині і така, що проходить через точку дотику, називається нормаллю до поверхні в цій точці. Якщо поверхня задана рівнянням $U(x,y,z) = C$, то напрямний вектор нормалі до неї має вигляд

$$\vec{N}(M) = \frac{\partial U(M)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U(M)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U(M)}{\partial z}\vec{k},$$

тобто збігається з вектором $\text{grad}U(M)$. Якщо скалярне поле плоске, то градієнт в даній точці спрямований, відповідно, по нормалі до лінії рівня поля, що проходить через цю точку.

Отже, з урахуванням того, що $\vec{s}^{\,0} = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k}$, отримуємо

$$\frac{\partial U(M)}{\partial s} = \operatorname{grad} U(M) \cdot \vec{s}^{\,0},$$

тобто похідна скалярного поля $U(M)$ у напрямку $\vec{s}$ дорівнює скалярному добутку векторів $\operatorname{grad} U(M)$ і $\vec{s}^{\,0}$.

Звідси випливають такі властивості градієнта і похідної за напрямком:

1. Якщо напрямок вектора $\vec{s}$ збігається з напрямком $\operatorname{grad} U(M)$, то кут φ дорівнює нулю, $\cos\varphi = 1$ і похідна скалярного поля за цим напрямком, обчислена в точці M, приймає найбільше значення, рівне $\left|\operatorname{grad} U(M)\right|$.

2. Якщо напрямок вектора $\vec{s}$ є перпендикуляр до напрямку вектора $\operatorname{grad} U(M)$, то $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\cos\varphi = 0$ і тоді $\frac{\partial U(M)}{\partial s} = 0.$

3. Вектор $\operatorname{grad} U(M)$ вказує напрямок найбільш швидкого зростання скалярного поля $U(M)$.

Приклад 1.11. Знайти похідну скалярного поля $U(x,y) = \sqrt{12 + x^2 + y^2}$ в точці $M(2,3)$ у напрямку до точки $N(5,6)$.

Розв'язання. Для обчислення похідної скористаємося формулою

$$\frac{\partial U(M)}{\partial s} = \operatorname{grad} U(M) \cdot \vec{s}^{\,0},$$

де $\vec{s}^{\,0}$ – орт вектора $\vec{s}$, в напрямі якого шукаємо похідну. $\vec{s} = \overrightarrow{MN} = (3,3)$. Обчислимо $\vec{s}^{\,0}$:

$$\vec{s}^{\,0} = \overrightarrow{MN}^{0} = \frac{1}{\left|\overrightarrow{MN}\right|}\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3\sqrt{2}}(3,3) = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}.$$

Далі,

$$\operatorname{grad}U(M) = \frac{\partial U(M)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U(M)}{\partial y}\vec{j} =$$

$$= \frac{x}{\sqrt{12+x^2+y^2}}\vec{i} + \frac{y}{\sqrt{12+x^2+y^2}}\vec{j},$$

$$\operatorname{grad}U(2,3) = \frac{2}{\sqrt{12+2^2+3^2}}\vec{i} + \frac{3}{\sqrt{12+2^2+3^2}}\vec{j} = \frac{2}{5}\vec{i} + \frac{3}{5}\vec{j}.$$

Звідси отримуємо

$$\left.\frac{\partial U(M)}{\partial s}\right|_{(2,3)} = \left(\frac{2}{5}\vec{i} + \frac{3}{5}\vec{j}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}\right) = \frac{2}{5\sqrt{2}} + \frac{3}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Відповідь: $\left.\frac{\partial U(M)}{\partial s}\right|_{(2,3)} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

Приклад 1.12. Знайти похідну скалярного поля $U(x,y,z) = 2x^2y + y^2z + xz$ в точці $M(-3,4,1)$ у напрямку до точки $N(-5,2,3)$.

Розв'язання. Скористаємося формулою

$$\frac{\partial U(M)}{\partial s} = \operatorname{grad}U(M)\cdot\vec{s}^{\,0}.$$

Знаходимо

$$\operatorname{grad}U\left(-3,4,1\right)=\left.\left(\frac{\partial U\left(M\right)}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial U\left(M\right)}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial U\left(M\right)}{\partial z}\vec{k}\right)\right|_{\left(-3,4,1\right)}=$$

$$=\left.\left(\left(4xy+z\right)\vec{i}+\left(2x^2+2yz\right)\vec{j}+\left(y^2+x\right)\vec{k}\right)\right|_{\left(-3,4,1\right)}=$$

$$=-47\vec{i}+26\vec{j}+13\vec{k}.$$

Тепер знайдемо одиничний вектор напрямку, по якому шукаємо похідну:

$$\vec{s}=\overrightarrow{MN}=\left(-2,-2,2\right),\ \left|\vec{s}\right|=2\sqrt{3},\quad \vec{s}^{\,0}=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

І остаточно отримуємо:

$$\left.\frac{\partial U\left(M\right)}{\partial s}\right|_{\left(-3,4,1\right)}=\left(-47\vec{i}+26\vec{j}+13\vec{k}\right)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{i}-\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{j}+\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{k}\right)=\frac{34}{\sqrt{3}}.$$

Відповідь: $\left.\dfrac{\partial U\left(M\right)}{\partial s}\right|_{\left(-3,4,1\right)}=\dfrac{34}{\sqrt{3}}$.

Приклад 1.13. Знайти похідну скалярного поля

$$U\left(x,y,z\right)=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{6}+z^2$$

в точці $M\left(1,-2,3\right)$ у напрямку радіуса-вектора цієї точки.

Розв'язання. Радіус-вектор точки $M(1,-2,3)-$ це вектор $\vec{r}=(1,-2,3)$, а його орт дорівнює

$$\vec{r}^{\,0}=\frac{1}{|\vec{r}|}\vec{r}=\frac{1}{\sqrt{14}}(1,-2,3)=\frac{1}{\sqrt{14}}\vec{i}-\frac{2}{\sqrt{14}}\vec{j}+\frac{3}{\sqrt{14}}\vec{k}=\vec{s}^{\,0}.$$

Обчислимо градієнт розглянутого поля в точці $M(1,-2,3)$:

$$\operatorname{grad}U(M)=\frac{x}{2}\vec{i}+\frac{y}{3}\vec{j}+2z\vec{k},\quad \operatorname{grad}U(1,-2,3)=\frac{1}{2}\vec{i}-\frac{2}{3}\vec{j}+6\vec{k}.$$

Звідси отримуємо $\left.\dfrac{\partial U(M)}{\partial s}\right|_{(1,-2,3)}=$

$$=\left(\frac{1}{2}\vec{i}-\frac{2}{3}\vec{j}+6\vec{k}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\vec{i}-\frac{2}{\sqrt{14}}\vec{j}+\frac{3}{\sqrt{14}}\vec{k}\right)=\frac{119}{6\sqrt{14}}\ .$$

Відповідь: $\left.\dfrac{\partial U(M)}{\partial s}\right|_{(1,-2,3)}=\dfrac{119}{6\sqrt{14}}$.

Приклад 1.14. Знайти швидкість і напрямок найбільш швидкого зростання скалярного поля $U(x,y,z)=xyz$ в точці $M(1,2,-2)$.

Розв'язання. Напрямок найбільш швидкого зростання скалярного поля $U(M)-$ це напрямок вектора $\operatorname{grad}U(M)$.

Знайдемо $\operatorname{grad}U(1,2,-2)$:

$$\operatorname{grad}U(M)=yz\vec{i}+xz\vec{j}+xy\vec{k},\qquad \operatorname{grad}U(1,2,-2)=-4\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}.$$

Одиничний вектор напрямку найбільш швидкого зростання скалярного поля дорівнює

$$\vec{s}^{\,0}=\frac{1}{\left|\mathrm{grad}U(1,2,-2)\right|}\mathrm{grad}U(1,2,-2)=\frac{1}{2\sqrt{6}}\left(-4\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}\right)=$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{6}}\vec{i}-\frac{1}{\sqrt{6}}\vec{j}+\frac{1}{\sqrt{6}}\vec{k}.$$

Тоді маємо

$$\left.\frac{\partial U(M)}{\partial s}\right|_{(1,2,-2)}=\left|\mathrm{grad}U(1,2,-2)\right|=2\sqrt{6}.$$

Відповідь: орт напрямку найбільш швидкого зростання заданого скалярного поля в точці $(1,2,-2)$ є $\vec{s}^{\,0}=-\frac{2}{\sqrt{6}}\vec{i}-\frac{1}{\sqrt{6}}\vec{j}+\frac{1}{\sqrt{6}}\vec{k}$, а швидкість найбільш швидкого зростання поля дорівнює $2\sqrt{6}$.

Приклад 1.15. Знайти швидкість і напрямок найбільш швидкого зростання скалярного поля $U(x,y,z)=xy^3z^4$ в точці $M(1,1,1)$.

Розв'язання. Напрямок найбільш швидкого зростання скалярного поля $U(M)$ вказує вектор $\mathrm{grad}U(M)$.

Знайдемо $\mathrm{grad}U(1,1,1)$:

$$\mathrm{grad}U(M)=y^3z^4\vec{i}+3xy^2z^4\vec{j}+4xy^3z^3\vec{k},$$

Тоді

$$\mathrm{grad}U(1,1,1)=\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}.$$

Одиничний вектор напрямку найбільш швидкого зростання дорівнює

$$\vec{s}^{\,0}=\frac{1}{\left|\operatorname{grad}U\left(1,1,1\right)\right|}\operatorname{grad}U\left(1,1,1\right)=\frac{1}{\sqrt{26}}\left(\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{26}}\vec{i}+\frac{3}{\sqrt{26}}\vec{j}+\frac{4}{\sqrt{26}}\vec{k}.$$

Тоді маємо

$$\left.\frac{\partial U\left(M\right)}{\partial s}\right|_{\left(1,1,1\right)}=\left|\operatorname{grad}U\left(1,1,1\right)\right|=\sqrt{26}.$$

Відповідь: напрямок найбільш швидкого зростання заданого скалярного поля в точці $\left(1,1,1\right)$ задається вектором

$$\vec{s}^{\,0}=\frac{1}{\sqrt{26}}\vec{i}+\frac{3}{\sqrt{26}}\vec{j}+\frac{4}{\sqrt{26}}\vec{k},$$

а швидкість найбільш швидкого зростання дорівнює $\sqrt{26}.$

Приклад 1.16. Знайти поверхню рівня скалярного поля $U\left(x,y,z\right)=2x^2+3y^2-z$, що проходить через точку $M\left(1,1,-1\right)$, а також одиничний вектор напрямку найбільш швидкого зростання заданого поля в точці $M\left(1,1,-1\right).$

Розв'язання. Рівняння поверхонь рівня заданого скалярного поля має вигляд $2x^2+3y^2-z=C.$ Точці $M\left(1,1,-1\right)$ відповідає значення константи $C=2+3+1=6.$

Тобто через точку $M(1,1,-1)$ проходить параболоїд $z = 2x^2 + 3y^2 - 6.$ Напрямок найбільш швидкого зростання поля в точці M показує вектор $\operatorname{grad}U(M).$ Обчислимо

$$\operatorname{grad}U(M) = 4x\vec{i} + 6y\vec{j} - \vec{k},$$

тоді

$$\operatorname{grad}U(1,1,-1) = 4\vec{i} + 6\vec{j} - \vec{k}, \quad \left|\operatorname{grad}U(1,1,-1)\right| = \sqrt{53}.$$

Одиничний вектор дорівнює

$$\vec{s}^{\,0} = \left(\frac{4}{\sqrt{53}}, \frac{6}{\sqrt{53}}, -\frac{1}{\sqrt{53}}\right).$$

Відповідь: поверхня рівня, що проходить через точку $M(1,1,-1),-$ це параболоїд $z = 2x^2 + 3y^2 - 6.$ Одиничний вектор напрямку найбільш швидкого зростання заданого поля в точці $M(1,1,-1)$ дорівнює $\vec{s}^{\,0} = \left(\frac{4}{\sqrt{53}}, \frac{6}{\sqrt{53}}, -\frac{1}{\sqrt{53}}\right).$

2.ВЕКТОРНЕ ПОЛЕ

2.1. Означення векторного поля та приклади векторних полів

Означення. *Якщо в області* D *простору* R^3 *визначена деяка вектор-функція* $\vec{a}(M)$*, то кажуть, що в області* D *задано векторне поле* $\vec{a}(M)$.

Приклади векторних полів

а) Поле сил тяжіння

Якщо в просторі є деякий розподіл мас, то згідно із законом Ньютона на одиничну масу, розташовану в точці P, діє деяка сила тяжіння $\vec{F}(P)$. Ця сила називається напруженістю поля тяжіння в точці P. Вектори $\vec{F}(P)$, що розглядаються у всіх точках простору, визначають векторне поле, яке зветься *напруженістю поля тяжіння* даної системи мас.

б) Напруженість електричного поля
(однорідного і ізотропного)

Якщо в просторі є розподіл електричних зарядів, то за законом Кулона на нерухомий одиничний позитивний заряд, розміщений в певній точці P, діє сила $\vec{E}(P)$, яка називається *напруженістю електричного поля*.

в) Поле швидкостей рухомої матерії

Припустимо, що в просторі відбувається рух деякої неперервно розподіленої маси, наприклад, протікання рідини. Тоді в кожній точці M простору ми можемо побудувати вектор $\vec{V}(M)-$ вектор швидкості частки матерії, що знаходиться в даний момент часу в точці M. У кожен момент часу сукупність векторів $\vec{V}(M)$ для всіх точок M даної області визначає векторне поле – поле швидкостей часток матерії, що рухається.

2.2. Векторні лінії

Найпростішими геометричними характеристиками векторних полів є векторні лінії і векторні трубки.

Означення. *Векторною лінією векторного поля* $\vec{a}(M)$ *називається така лінія, в кожній точці якої вектор поля спрямований по дотичній до цієї лінії.*

Таким чином, в поле швидкостей рідини, що рухається, векторна лінія являє собою таку лінію, в кожній точці якої вектор швидкості спрямований по дотичній до цієї лінії. Якщо $L-$ замкнений контур, що лежить в векторному полі і не збігається навіть частково з будь-якою векторною лінією, то векторні лінії, що проходять через точки цього контуру, утворюють трубчасту поверхню, яка називається *векторною трубкою*.

Нехай задано векторне поле

$$\vec{a}(M) = \left(a_x(x,y,z), a_y(x,y,z), a_z(x,y,z)\right).$$

Векторні лінії цього поля визначаються системою диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{a_x(x,y,z)} = \frac{dy}{a_y(x,y,z)} = \frac{dz}{a_z(x,y,z)},$$

яку можна переписати таким чином:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{a_y(x,y,z)}{a_x(x,y,z)}, \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{a_z(x,y,z)}{a_x(x,y,z)}. \end{cases}$$

Це – нормальна система диференціальних рівнянь з двома невідомими функціями $y(x)$, $z(x)$. Її загальний розв’язок

$$\begin{cases} y = F_1(x, C_1, C_2), \\ z = F_2(x, C_1, C_2) \end{cases}$$

визначає векторні лінії як лінії перетину циліндричних поверхонь.

Систему диференціальних рівнянь, що визначають векторні лінії, можна записати також у наступному вигляді:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_x(x,y,z), \\ \dfrac{dy}{dt} = a_y(x,y,z), \\ \dfrac{dz}{dt} = a_z(x,y,z). \end{cases}$$

Загальний розв’язок цієї системи

$$\begin{cases} x(t) = \varphi_1(t, C_1, C_2, C_3), \\ y(t) = \varphi_2(t, C_1, C_2, C_3), \\ z(t) = \varphi_3(t, C_1, C_2, C_3) \end{cases}$$

дає параметричні рівняння сімейства векторних ліній.

Приклад 2.1. Знайти векторні лінії поля $\vec{a}(M) = x\vec{i} - y\vec{j} - 2z\vec{k}$.

Розв'язання. В даному випадку система диференціальних рівнянь, що визначає векторні лінії, має вигляд:

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{-y}=\frac{dz}{-2z} \quad \text{або} \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{x}=\dfrac{dy}{-y}, \\ \dfrac{dy}{-y}=\dfrac{dz}{-2z}. \end{cases}$$

Інтегруючи отриману систему, знаходимо її спільне рішення:

$$\begin{cases} \ln|x|+\ln|y|=\ln|C_1|, \\ \ln|y|-\dfrac{1}{2}\ln|z|=\dfrac{1}{2}\ln|C_2| \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} xy=C_1, \\ y^2=C_2 z, \end{cases}$$

де C_1 і C_2 − довільні сталі.

Відповідь: векторні лінії розглянутого поля є лінії перетину гіперболічних циліндрів $xy=C_1$ з параболічними циліндрами $y^2=C_2 z$.

Приклад 2.2. Знайти векторні лінії плоского поля $\vec{a}=\left(x^2-y^2\right)\vec{i}+2xy\vec{j}$.

Розв'язання. В цьому випадку для знаходження векторних ліній маємо одне диференціальне рівняння:

$$\frac{dx}{\left(x^2-y^2\right)}=\frac{dy}{2xy} \quad \text{або} \quad \frac{dy}{dx}=\frac{2xy}{\left(x^2-y^2\right)}.$$

Це – однорідне диференціальне рівняння першого порядку. Провівши заміну $y=ux,\ y'=u'x+u,$ де $u-$нова невідома функція, отримуємо диференціальне рівняння

$$u'x+u=\frac{2u}{1-u^2}.$$

Розділимо тут змінні:

$$\left(\frac{1}{u}-\frac{2u}{1+u^2}\right)du=\frac{dx}{x}\ .$$

Тоді

$$\int\left(\frac{1}{u}-\frac{2u}{1+u^2}\right)du+\ln|2C|=\int\frac{dx}{x},$$

$$\ln|u|-\ln\left|1+u^2\right|+\ln|2C|=\ln|x|,\ \ \frac{2Cu}{1+u^2}=x.$$

Звідси $x^2+y^2=2Cy,$ де $C-$ довільна стала. Виділяючи в останньому рівнянні повний квадрат по $y,$ отримуємо загальний розв'язок $x^2+(y-C)^2=C^2.$

Відповідь: векторними лініями розглянутого поля є кола $x^2+(y-C)^2=C^2,$ де $C-$довільна стала.

Приклад 2.3. Знайти векторні лінії плоского поля $\vec{a}=(x-y)\vec{i}+y\vec{j}.$

Розв'язання. Для знаходження векторних ліній маємо диференціальне рівняння:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x-y}.$$

Це – однорідне диференціальне рівняння першого порядку. Діючи так само, як в прикладі 2.2, приходимо до диференціального рівняння

$$\left(\frac{1}{u^2}-\frac{1}{u}\right)du=\frac{dx}{x}.$$

Звідси

$$\int\left(\frac{1}{u^2}-\frac{1}{u}\right)du+C=\int\frac{dx}{x},$$

$$-\frac{1}{u}-\ln|u|+C=\ln|x|, \quad \frac{x}{y}+\ln|y|=C,$$

де $C-$ довільна стала.

Відповідь: рівняння векторних ліній мають вигляд

$\dfrac{x}{y}+\ln|y|=C,$ де $C-$ довільна стала.

Приклад 2.4. Знайти векторні лінії поля

$$\vec{a}=\frac{1}{x}\vec{i}+\frac{1}{y}\vec{j}+\frac{1}{z}\vec{k}.$$

Розв'язання. Система диференціальних рівнянь, що визначає векторні лінії, має вигляд:

$$\begin{cases} xdx=ydy, \\ ydy=zdz. \end{cases}$$

Інтегруючи цю систему, знаходимо її загальний розв'язок:

$$\begin{cases} x^2-y^2=C_1, \\ y^2-z^2=C_2. \end{cases}$$

Відповідь: векторні лінії розглянутого поля є лінії перетину гіперболічних циліндрів $x^2-y^2=C_1$ з гіперболічними циліндрами $y^2-z^2=C_2$, де C_1 і C_2- довільні сталі.

Приклад 2.5. Знайти векторні лінії поля $\vec{a} = (y-z)\vec{i} + (z-x)\vec{j} + (x-y)\vec{k}.$

Розв'язання. Система диференціальних рівнянь, що визначає векторні лінії, має вигляд:

$$\frac{dx}{y-z} = \frac{dy}{z-x} = \frac{dz}{x-y}.$$

Щоб розв'язати цю систему, використовуємо наступну властивість рівних дробів: якщо

$$\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} = \frac{u_3}{v_3} = \delta,$$

то при будь-яких $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ має місце співвідношення

$$\frac{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3}{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3} = \delta.$$

Вважаючи $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1,$ отримуємо

$$\frac{dx + dy + dz}{y - z + z - x + x - y} = \frac{d(x+y+z)}{0} = \delta.$$

Звідси маємо $d(x+y+z) = 0,\ \ x+y+z = C_1.$

Далі, вважаючи $\alpha_1 = 2x,\ \alpha_2 = 2y,\ \alpha_3 = 2z,$ отримуємо

$$\frac{2xdx + 2ydy + 2zdz}{2xy - 2xz + 2yz - 2yx + 2zx - 2zy} = \frac{d\left(x^2 + y^2 + z^2\right)}{0} = \delta,$$

Звідки $d\left(x^2 + y^2 + z^2\right) = 0,\ \ x^2 + y^2 + z^2 = C_2^2.$

Таким чином, отримали загальний розв'язок розглянутої системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x+y+z=C_1, \\ x^2+y^2+z^2=C_2^2, \end{cases}$$

де C_1 і C_2- довільні сталі.

Відповідь: векторні лінії розглянутого поля – кола, утворені перетином сфер $x^2+y^2+z^2=C_2^2$ і площин $x+y+z=C_1,$ де C_1 і C_2- довільні сталі.

Приклад 2.6. Знайти векторні лінії поля

$$\vec{a}=x\left(y^2-z^2\right)\vec{i}-y\left(z^2+x^2\right)\vec{j}+z\left(x^2+y^2\right)\vec{k}.$$

Розв'язання. Система диференціальних рівнянь, яка визначає векторні лінії, має вигляд:

$$\frac{dx}{x\left(y^2-z^2\right)}=\frac{dy}{-y\left(z^2+x^2\right)}=\frac{dz}{z\left(x^2+y^2\right)}.$$

Вважаючи $\alpha_1=2x,\ \alpha_2=2y,\ \alpha_3=2z,$ отримуємо

$$\frac{2xdx+2ydy+2zdz}{2x^2y^2-2x^2z^2-2y^2z^2-2x^2y^2+2x^2z^2+2y^2z^2}=$$

$$=\frac{d\left(x^2+y^2+z^2\right)}{0}=\delta,$$

звідки $d\left(x^2+y^2+z^2\right)=0,\ x^2+y^2+z^2=C_1^2.$

Вважаючи $\alpha_2=z,\ \alpha_3=y,$ отримуємо друге співвідношення з рівняння

$$\frac{zdy+ydz}{-yz\left(z^2+x^2\right)+yz\left(x^2+y^2\right)}=\frac{dx}{x\left(y^2-z^2\right)}$$

або

$$\frac{d\left(yz\right)}{yz\left(y^2-z^2\right)}=\frac{dx}{x\left(y^2-z^2\right)}, \qquad \frac{d\left(yz\right)}{yz}=\frac{dx}{x}.$$

Звідси $\ln\left|yz\right|=\ln\left|C_2x\right|,\ yz=C_2x.$ Система

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=C_1^2, \\ yz=C_2x, \end{cases}$$

де C_1 і C_2- довільні сталі, є загальним розв’язком розглянутої системи диференціальних рівнянь.

Відповідь: векторні лінії розглянутого поля є лініями перетину сфер $x^2+y^2+z^2=C_1^2$ і гіперболічних параболоїдів $yz=C_2x,$ де C_1 і C_2- довільні сталі.

2.3. Потік векторного поля

Означення. *Потоком* Π *векторного поля* $\vec{a}\left(M\right)$ *через двосторонню орієнтовану поверхню* S *називається поверхневий інтеграл другого роду*

$$\Pi=\iint\limits_S \vec{a}(M)d\vec{S}=\iint\limits_S a_x\left(x,y,z\right)dydz+a_y\left(x,y,z\right)dxdz+a_z\left(x,y,z\right)dxdy.$$

Нагадаємо, що двостороння поверхня називається орієнтованою, якщо обрана додатна сторона поверхні і, відповідно, додатний напрямок нормалі. У замкнутої поверхні додатна сторона – зовнішня.

Очевидно, потік векторного поля $\vec{a}(M)$ залежить від орієнтації поверхні. При зміні орієнтації поверхні на протилежну потік змінює знак.

Фізичний зміст потоку векторного поля

До поняття потоку векторного поля призводять багато задач, що виникають при дослідженні різних векторних полів. Розглянемо, наприклад, задачу, пов'язану з рухом нестисливої рідини.

Нехай в деякій частині простору рухається нестисливої рідина зі швидкістю $\vec{V}(M)$, яка залежить тільки від точки M і не залежить від часу. Потрібно визначити обсяг W рідини, що протікає за одиницю часу через деяку двосторонню орієнтовану поверхню S, вміщену в векторне поле $\vec{V}(M)$. Передбачається, що поверхня S є незамкненою і будь-яка нормаль, проведена до цієї поверхні, перетинає її не більше, ніж в одній точці. Тоді об’єм W дорівнює модулю потоку Π векторного поля $\vec{V}(\mathrm{M})$ через поверхню S.

$$W = \left| \iint_S \vec{V}(M)\, d\vec{S} \right| = |\Pi|.$$

Розглянемо тепер фізичний зміст потоку векторного поля в разі замкнутої поверхні. Нехай в векторне поле $\vec{V}(M)$, де $\vec{V}(M)$– швидкість руху нестисливої рідини, поміщена замкнута поверхня S. Очевидно, в одних точках розглянутої поверхні рідина вливається всередину тіла, обмеженого цією поверхнею, а в інших – витікає. Відповідно до цієї класифікації точок поверхня S може бути розглянута як поверхня, утворена поверхнями S_1 і S_2, де S_1 є геометричне місце всіх точок поверхні, в яких рідина вливається всередину тіла, а S_2 – геометричне місце всіх точок поверхні $S,$ в яких рідина витікає з тіла. Тому величину

$$\Pi = \oiint_S \vec{V}(M)\, d\vec{S}$$

можна представити у вигляді суми двох поверхневих інтегралів:

$$\oiint_S \vec{V}(M)\, d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{V}(M)\, d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{V}(M)\, d\vec{S} \ .$$

В обох інтегралах додатний напрям нормалі є напрям зовнішньої нормалі до поверхні S. Тому в разі поверхні S_1 кут між вектором $\vec{V}(M)$ і додатним напрямом нормалі - тупий, а в разі поверхні S_2 – гострий. Отже, на поверхні S_1 скалярний добуток $\vec{V}(M)\cdot d\vec{S} < 0,$ а на поверхні S_2 скалярний добуток $\vec{V}(M)\cdot d\vec{S} > 0.$ Звідси:

$$\Pi_1 = \iint_{S_1} \vec{V}(M)\, d\vec{S} < 0 \ , \quad \Pi_2 = \iint_{S_2} \vec{V}(M)\, d\vec{S} > 0 \ .$$

Таким чином, $\Pi = \Pi_1 + \Pi_2,$ де $\Pi_1 < 0$ і $\Pi_2 > 0.$

Очевидно, $|\Pi_1|$ дорівнює обсягу рідини, що вливається всередину розглянутого тіла, а $|\Pi_2| -$ об'єму рідини, яка витікає з даного тіла. Тобто в разі замкнутої поверхні потік Π дорівнює алгебраїчній сумі об'ємів рідини, що вливається і що витікає. Якщо $\Pi = 0,$ то це означає, що обсяг рідини, що вливається, дорівнює обсягу рідини, що витікає. Якщо $\Pi > 0,$ то обсяг рідини, що витікає перевищує обсяг рідини, що вливається, а так як рідина передбачається нестисливою, то це означає, що всередині тіла є джерела цієї рідини. Якщо $\Pi < 0,$ то обсяг рідини, що вливається, перевищує обсяг рідини, що витікає, а це означає, що всередині тіла частина рідини поглинається, тобто є стоки.

Таким чином, знак потоку Π дає сумарну характеристику потужності джерел і стоків тієї частини поля $\vec{V}(M)$, яка обмежена даною замкнутою поверхнею S.

Приклад 2.7. Знайти потік векторного поля

$$\vec{a}(x,y,z)=(2x+z)\vec{i}+(3y-2z)\vec{j}+(5x+2y)\vec{k}$$

через частину площині $x+y+z=1$, що лежить в першому октанті. Вектор нормалі до цієї площини утворює з додатним напрямом осі Oz гострий кут, чим і визначається орієнтація поверхні. (Див. рисунок 2.1).

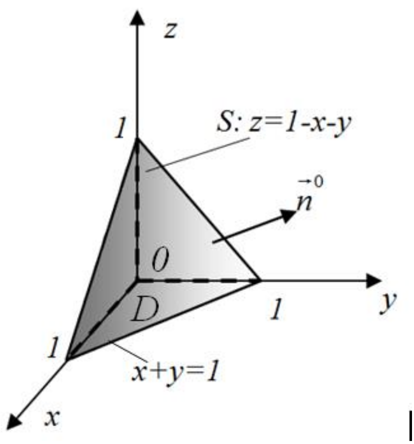

Рисунок 2.1

Розв'язання. У нас поверхнею S є частина площини, рівняння якої $z=1-x-y$. А тому обчислення поверхневого інтеграла другого роду зводиться до обчислення поверхневого інтегралу першого роду і, далі, до обчислення подвійного інтегралу:

$$\iint_S \vec{a}(M)\,d\vec{S} = \iint_S \left(\vec{a}(M)\cdot\vec{n}^0\right)dS,$$

де $\vec{n}^0$ – орт вектора нормалі, зазначеного в умови, $\vec{a}(M)\cdot\vec{n}^0$ – скалярний добуток двох векторів.

Нагадаємо, що коли поверхня задана рівнянням $F(x,y,z)=0$, то вектор нормалі до неї має вигляд $\pm\left(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}\right)$. Оскільки рівняння заданої площини можна записати у вигляді $x+y+z-1=0$, то вектор нормалі до неї є $\pm(1,1,1)$. Тому в якості вектора нормалі, що утворює з додатним напрямом осі Oz гострий кут, обираємо вектор $\vec{n}=(1,1,1)$. Тоді

$$\vec{n}^0 = \frac{1}{|\vec{n}|}\cdot\vec{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad \vec{a}(M)\cdot\vec{n}^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(7x+5y-z).$$

Далі,

$$dS = \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy = \sqrt{1+(-1)^2+(-1)^2}\,dxdy = \sqrt{3}dxdy.$$

Нехай $D-$ проекція поверхні S на площину XOY. Тоді

$$\Pi = \iint_S \vec{a}(M)\,d\vec{S} = \iint_S \frac{1}{\sqrt{3}}(7x+5y-z)\,dS =$$

$$= \iint_D \left(7x+5y-(1-x-y)\right)dxdy =$$

$$=\iint\limits_D (8x+6y-1)\,dxdy=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(8x+6y-1)\,dy=$$

$$=\int_0^1\left(8xy+3y^2-y\right)\Big|_0^{1-x}dx=\int_0^1\left(8x-8x^2+3(1-x)^2-1+x\right)dx=$$

$$=\left(\frac{9x^2}{2}-\frac{8x^3}{3}-(1-x)^3-x\right)\Bigg|_0^1=\frac{11}{6}\,.$$

Відповідь: $\Pi=\dfrac{11}{6}$.

Приклад 2.8. Знайти потік векторного поля $\vec{a}(x,y,z)=(5x+z)\vec{i}+(x-3y)\vec{j}+(4y-2z)\vec{k}$ через частину площини $x+y+z=2$, що лежить в першому октанті. Вектор нормалі до цієї площини утворює з п додатним напрямом осі Oz гострий кут. (Див. рисунок 2.2).

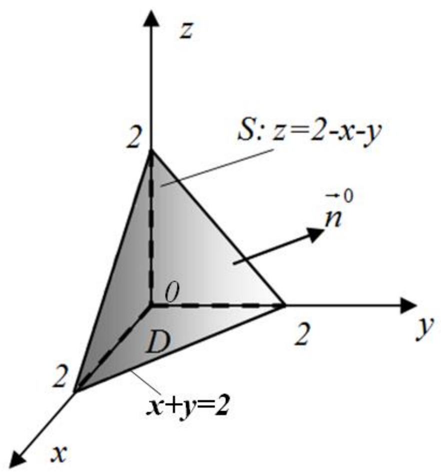

Рисунок 2.2

Розв'язання. В даному випадку поверхня S є частиною площини, рівняння якої $z=2-x-y$. Вектор нормалі до поверхні S дорівнює $\vec{n}=(1,1,1)$ (див. приклад 2.7), а його орт

$$\vec{n}^0=\frac{1}{|\vec{n}|}\cdot\vec{n}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

$$dS=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy=\sqrt{3}dxdy.$$

Нехай $D-$ проекція поверхні S на площину XOY. Тоді (див. приклад 2.7)

$$\Pi=\iint_S \vec{a}(M)d\vec{S}=\iint_S\left(\vec{a}(M)\cdot\vec{n}^0\right)dS=\iint_S\frac{1}{\sqrt{3}}(6x+y-z)dS=$$

$$=\iint_D(7x+2y-2)dxdy=\int_0^2 dx\int_0^{2-x}(7x+2y-2)dy=$$

$$=\int_0^2\left(7xy+y^2-2y\right)\Big|_0^{2-x}dx=\int_0^2\left(14x-7x^2+(2-x)^2-4+2x\right)dx=$$

$$=\int_0^2\left(-7x^2+16x-4+(2-x)^2\right)dx=8\,.$$

Відповідь: $\Pi=8.$

2.4. Дивергенція

Означення. *Дивергенцією (або розбіжністю) векторного поля* $\vec{a}(M)$ *в точці* P *(позначається* $\operatorname{div}\vec{a}$ *) називається границя відно-*

шення потоку вектора $\vec{a}(M)$ *через замкнену поверхню* S, *що оточує точку* P, *до об'єму V тіла, обмеженого цією поверхнею, за умови, що поверхня* S *довільним способом стягується в точку* P.

Таким чином, згідно з означенням, маємо:

$$\operatorname{div}\vec{a}\big|_P = \lim_{V\to 0}\left(\frac{1}{V}\oiint_S \vec{a}(M)\,d\vec{S}\right).$$

Дивергенція характеризує об'ємну щільність потоку П векторного поля $\vec{a}(M)$ в точці P. Якщо $\operatorname{div}\vec{a}\big|_P > 0$, то в точці P є джерело, потужність (інтенсивність) якого дорівнює значенню $\operatorname{div}\vec{a}\big|_P$. Якщо $\operatorname{div}\vec{a}\big|_P < 0$, то в точці P є стік, потужність (інтенсивність) якого дорівнює $\left|\operatorname{div}\vec{a}\big|_P\right|$. Якщо $\operatorname{div}\vec{a}\big|_P = 0$, то в точці P немає ні стоків, ні джерел.

Векторні поля, у яких $\operatorname{div}\vec{a} \equiv 0$, називаються *соленоїдальними* або *трубчастими*. Соленоїдальне поле має наступну властивість: *потік вектора через поперечні перерізи векторної трубки зберігає постійну величину*; цю величину називають *інтенсивністю* векторної трубки.

Знаходити значення $\operatorname{div}\vec{a}$ на основі означення надзвичайно важко. Для знаходження дивергенції слід скористатися якою-небудь системою координат. Нехай в поле вектора $\vec{a}(M)$ обрана декартова система координат. Тоді вектор $\vec{a}(M)$ представляється у вигляді $\vec{a}(M) = \left(a_x(x,y,z), a_y(x,y,z), a_z(x,y,z)\right)$. Нехай a_x, a_y, a_z – неперервні по всім змінним функції, які мають неперервні частинні похідні

$$\frac{\partial a_x}{\partial x},\ \frac{\partial a_y}{\partial y},\ \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

в даній області. Тоді $\operatorname{div}\vec{a}$ існує в кожній точці P, що лежить в цій області, і може бути обчислена за формулою

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

Застосовуючи цю формулу, легко довести властивості дивергенції, сформульовані нижче:

Властивість 1. $\operatorname{div}\vec{C} = 0,$ де $\vec{C} -$ постійний вектор.

Властивість 2. $\operatorname{div}(m\vec{a}) = m\operatorname{div}\vec{a},$ де $m -$ постійне число.

Властивість 3. $\operatorname{div}(\vec{a} + \vec{b}) = \operatorname{div}\vec{a} + \operatorname{div}\vec{b}.$

Властивість 4. $\operatorname{div}(\varphi\vec{a}) = \varphi\operatorname{div}\vec{a} + \operatorname{grad}\varphi\vec{a},$ де $\varphi -$ скалярна диференційована функція.

Властивість 5.

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}.$$

Приклад 2.9. Обчислити дивергенцію векторного поля $\vec{a} = xy^2z\vec{i} + xyz^2\vec{j} + x^2yz\vec{k}$ в точці $P(1,2,3)$.

Розв'язання. $a_x = xy^2z,\ a_y = xyz^2,\ a_z = x^2yz.$ Тому

$$\left.\frac{\partial a_x}{\partial x}\right|_P = \left.y^2z\right|_P = 12,\quad \left.\frac{\partial a_y}{\partial y}\right|_P = \left.xz^2\right|_P = 9,\quad \left.\frac{\partial a_z}{\partial z}\right|_P = \left.x^2y\right|_P = 2.$$

Звідси

$$\left.\operatorname{div}\vec{a}\right|_P = \left.\frac{\partial a_x}{\partial x}\right|_P + \left.\frac{\partial a_y}{\partial y}\right|_P + \left.\frac{\partial a_z}{\partial z}\right|_P = 12 + 9 + 2 = 23.$$

Відповідь: $\left.\operatorname{div}\vec{a}\right|_P = 23.$

Приклад 2.10. Обчислити дивергенцію векторного поля $\vec{a} = x^3yz\vec{i} + xy^3z\vec{j} + xyz^3\vec{k}$.

Розв'язання. $a_x = x^3yz,\ a_y = xy^3z,\ a_z = xyz^3.$ Тому

$$\frac{\partial a_x}{\partial x} = 3x^2yz,\ \frac{\partial a_y}{\partial y} = 3xy^2z,\ \frac{\partial a_z}{\partial z} = 3xyz^2.$$

Тоді

$$\operatorname{div}\vec{a} = 3x^2yz + 3xy^2z + 3xyz^2 = 3xyz(x+y+z).$$

Відповідь: $\operatorname{div}\vec{a} = 3xyz(x+y+z)$.

Приклад 2.11. Чи є векторне поле $\vec{a} = (3x+5y+2z)\vec{i} + xz\vec{j} + (xy-3z)\vec{k}$ соленоїдальним?

Розв'язання. Дивергенція векторного поля $\vec{a}$ дорівнює

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = 3 + 0 - 3 = 0.$$

Відповідь: Поле є соленоїдальним.

2.5. Теорема Гаусса-Остроградського в векторній формі

Теорема. *Потік векторного поля* $\vec{a}(M)$ *через замкнену поверхню* S, *що лежить в полі вектора* $\vec{a}(M)$, *дорівнює потрійному інтегралу від* $\operatorname{div}\vec{a}$ *взятому по області* Ω, *обмеженою поверхнею* S, *тобто*

$$\oiint\limits_S \vec{a}(M)\,d\vec{S} = \iiint\limits_\Omega \operatorname{div}\vec{a}\,dxdydz.$$

Наслідок. *Якщо в області* Ω, *що обмежена замкнутою поверхнею* S, *поле вектора* $\vec{a}(M)$ *є соленоїдальним, то потік векторного поля* $\vec{a}(M)$ *через цю поверхню дорівнює нулю.*

Застосування теореми Гаусса-Остроградського при обчисленні потоку вектора доцільно в тому випадку, коли обчислення потрійного інтеграла простіше, ніж обчислення поверхневого інтеграла другого роду.

Приклад 2.12. Знайти потік векторного поля $\vec{a}(x,y,z) = (5x-4y+z)\vec{i} + (-4x+3y-z)\vec{j} + (x-y+8z+2)\vec{k}$ через повну поверхню прямого кругового конуса, основа якого лежить на площині $z=0$, а вісь - на осі Oz. Висота конуса дорівнює 5, а радіус основи дорівнює 3.

Розв'язання. Спочатку обчислимо дивергенцію

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = 5+3+8 = 16.$$

Тоді

$$\oiint_S \vec{a}(M)\,d\vec{S} = \iiint_\Omega \operatorname{div}\vec{a}\;dxdydz =$$

$$= 16\iiint_\Omega dxdydz = 16V_{конуса} = 16\cdot\frac{1}{3}\pi R^2 h = 240\pi.$$

Відповідь: $\Pi = 240\pi.$

Приклад 2.13. Знайти потік векторного поля $\vec{a}(x,y,z) = (2x-y+3z)\vec{i} + (x+3y-2)\vec{j} + (y+z-1)\vec{k}$ через повну поверхню циліндра $x^2+y^2=1,\ 0\le z\le 3.$

Розв'язання.

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = 2 + 3 + 1 = 6.$$

Тоді

$$\Pi = \oiint_S \vec{a}(M)\,d\vec{S} = \iiint_\Omega \operatorname{div}\vec{a}\;dxdydz =$$

$$= 6\iiint_\Omega dxdydz = 6V_{цилиндра} = 6\pi R^2 h = 18\pi.$$

Відповідь: $\Pi = 18\pi.$

Приклад 2.14. Знайти потік векторного поля $\vec{a}(x,y,z) = xy\vec{i} + yz\vec{j} + xz\vec{k}$ через повну поверхню піраміди, утвореної площинами $x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ x + y + z = 3.$ (Див. рисунок 2.3).

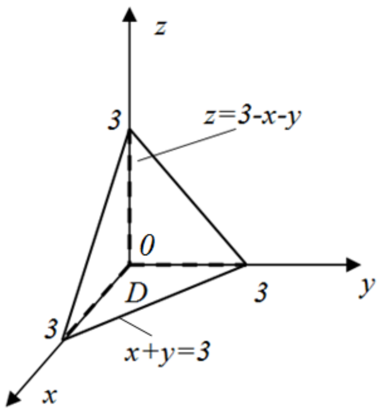

Рисунок 2.3

Розв'язання.

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = y + z + x.$$

Тоді

$$\Pi = \oiint\limits_S \vec{a}(M)\,d\vec{S} = \iiint\limits_\Omega \operatorname{div}\vec{a}\,dxdydz = \iiint\limits_\Omega (x+y+z)\,dxdydz =$$

$$= \int_0^3 dx \int_0^{3-x} dy \int_0^{3-x-y} (x+y+z)dz = \int_0^3 dx \int_0^{3-x} \left.\frac{(x+y+z)^2}{2}\right|_0^{3-x-y} dy =$$

$$= \int_0^3 dx \int_0^{3-x} \left(\frac{9}{2} - \frac{(x+y)^2}{2}\right) dy = \int_0^3 \left.\left(\frac{9}{2}y - \frac{(x+y)^3}{6}\right)\right|_0^{3-x} dx =$$

$$= \int_0^3 \left(9 - \frac{9}{2}x + \frac{x^3}{6}\right) dx = \left.\left(9x - \frac{9}{4}x^2 + \frac{x^4}{24}\right)\right|_0^3 = \frac{81}{8}.$$

Відповідь: $\Pi = \dfrac{81}{8}.$

Приклад 2.15. Знайти потік векторного поля $\vec{a}(x,y,z) = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + 2z\vec{k}$ через повну поверхню, утворену параболоїдом $z = 1 - x^2 - y^2$ і площиною $z = 0$. (Див. рисунок 2.4).

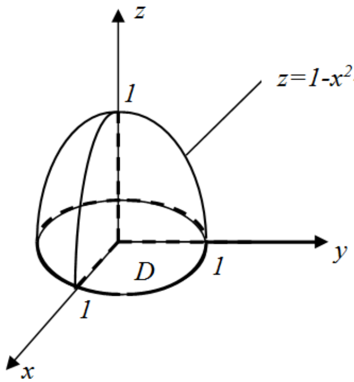

Рисунок 2.4

Розв’язання.

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = 2x + 2y + 2 = 2\left(x + y + 1\right).$$

Тоді

$$\oiint\limits_S \vec{a}\left(M\right) d\vec{S} = \iiint\limits_{\Omega} \operatorname{div}\vec{a}\; dxdydz = 2\iiint\limits_{\Omega}\left(x + y + 1\right) dxdydz.$$

Для обчислення отриманого потрійного інтеграла перейдемо до циліндричних координат:

$$\Pi = 2\iiint\limits_{\Omega}\left(\rho\cos\varphi + \rho\sin\varphi + 1\right)\rho d\rho d\varphi dz =$$

$$= 2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \left(\rho\cos\varphi + \rho\sin\varphi + 1\right)\rho d\rho \int\limits_0^{1-\rho^2} dz =$$

$$= 2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \left[\left(\rho^2\cos\varphi + \rho^2\sin\varphi + \rho\right)\left(z\Big|_0^{1-\rho^2}\right)\right] d\rho =$$

$$= 2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \left[\left(\rho^2 - \rho^4\right)\left(\cos\varphi + \sin\varphi\right) + \rho - \rho^3\right] d\rho =$$

$$= 2\int\limits_0^{2\pi}\left[\left(\frac{\rho^3}{3} - \frac{\rho^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 \cdot\left(\cos\varphi + \sin\varphi\right) + \left(\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^1\right] d\varphi =$$

$$= 2\int\limits_0^{2\pi}\left[\frac{2}{15}(\cos\varphi + \sin\varphi) + \frac{1}{4}\right] d\varphi = \frac{4}{15}\left(\sin\varphi - \cos\varphi\right)\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2}\varphi\Big|_0^{2\pi} = \pi.$$

Відповідь: $\Pi = \pi.$

2.6. Лінійний інтеграл і циркуляція векторного поля. Потенціальне поле

Означення. *Нехай дано векторне поле* $\vec{a}(M)$ *і деяка крива AB, що лежить в цьому полі. Лінійним інтегралом векторного поля* $\vec{a}$ *вздовж кривої* AB *називається криволінійний інтеграл другого роду*

$$\int\limits_{AB} \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int\limits_{AB} a_x dx + a_y dy + a_z dz.$$

Найпростіший фізичний зміст лінійного інтеграла - робота силового поля $\vec{a}(M)$ при переміщенні в ньому матеріальної точки вздовж кривої AB з положення A в положення B.

Приклад 2.16. Знайти роботу А силового поля $\vec{a}(M) = yz\vec{i} + zx\vec{j} + xy\vec{k}$ при переміщенні в ньому матеріальної точки вздовж відрізка прямої $x = t+1, y = t, z = t+3$ з положення $A(1,0,3)$ в положення $B(4,3,6)$.

Розв'язання.

$$\text{A} = \int\limits_{AB} \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int\limits_{AB} yzdx + zxdy + xydz = \int\limits_0^3 \left(3t^2 + 8t + 3\right) dt = 72.$$

Відповідь: $\text{A} = 72.$

Приклад 2.17. Знайти роботу силового поля $\vec{a}(M) = (y-z)\vec{i} + (z-x)\vec{j} + (x-y)\vec{k}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж гвинтової лінії $x = R\cos t,\ y = R\sin t,\ z = t$ з положення $A(R,0,0)$ в положення $B(R,0,2\pi)$.

Розв'язання. Точці A відповідає значення параметра $t=0,$ а точці $B-$ значення $t=2\pi.$ Тому

$$\mathrm{A}=\int_{AB}\vec{a}\cdot d\vec{r}=\int_{AB}\left(y-z\right)dx+\left(z-x\right)dy+\left(x-y\right)dz=$$

$$=\int_{0}^{2\pi}((R\sin t-t)(-R\sin t)+(t-R\cos t)R\cos t+(R\cos t-R\sin t))dt=$$

$$=\int_{0}^{2\pi}\left(-R^2+Rt(\sin t+\cos t)+R\cos t-R\sin t\right)dt=-2\pi R\left(R+1\right).$$

Відповідь: $\mathrm{A}=-2\pi R\left(R+1\right).$

Нехай $U\left(M\right)=U(x,y,z)-$диференційована по всім змінним скалярна функція. Мають місце такі теореми:

Теорема 1. *Лінійний інтеграл векторного поля* $\mathrm{grad}U$ *вздовж кривої* AB *дорівнює різниці значень функції* $U\left(M\right)$ *в точках* B *і* A. *Тобто*

$$\int_{AB}\mathrm{grad}U\cdot d\vec{r}=\int_{AB}dU=U\left(B\right)-U\left(A\right).$$

Теорема 2. *Якщо в полі вектора* $\vec{a}\left(M\right)$, *неперервного в області* D, *лінійний інтеграл векторного поля* $\vec{a}$ *вздовж будь-якої замкненої кривої, що лежить всередині області* D, *дорівнює нулю, то вектор* $\vec{a}$ *є градієнтом деякої диференційованої скалярної функції* $U\left(M\right).$

При цьому функція $U\left(M\right)$ визначається з точністю до постійного доданку.

Означення. *Якщо існує скалярна функція* $U\left(M\right)$ *така, що* $\vec{a}\left(M\right)=\mathrm{grad}U,$ *то векторне поле* $\vec{a}\left(M\right)$ *називається потенційним,* *а функція* $U(M)$ *називається потенційною функцією або потенціалом векторного поля* $\vec{a}(M)$.

Очевидно, в потенційному полі $\vec{a}(M)$ $dU = a_x dx + a_y dy + a_z dz$ і лінійний інтеграл

$$\int_{AB} \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_{AB} dU = U(B) - U(A),$$

тобто він не залежить від форми кривої, а залежить тільки від початкової і кінцевої точок.

Особливий інтерес представляє випадок, коли лінійний інтеграл береться вздовж замкненої кривої, яку будемо називати контуром.

Означення. *Лінійний інтеграл векторного поля* $\vec{a}$, *взятий по замкненому контуру* L, *називається циркуляцією векторного поля по контуру* L.

Циркуляція векторного поля $\vec{a}$ по контуру L характеризує обертальну здатність поля $\vec{a}$ на даному контурі.

При обчисленні циркуляції необхідно вказувати напрямок обходу контуру. Для плоского поля $\vec{a}(x, y)$ додатним напрямком вважається обхід контуру проти годинникової стрілки, а від'ємним – за годинниковою стрілкою. Якщо поле тривимірне, то додатний напрямок вказується додатково. Зокрема, нехай S – гладка незамкнена двостороння поверхня, обмежена контуром L. Виберемо додатну сторону цієї поверхні. Напрямок обходу контуру L вважається додатним, якщо спостерігач, який рухається по контуру в цьому напрямку так, що нормаль до додатної стороні поверхні пронизує його від ніг до голови, бачить безпосередньо прилеглу до нього частину поверхні зліва від себе.

2.7. Ротор векторного поля

Нехай дано векторне поле $\vec{a}$. Нехай $\vec{n}^0$ – одиничний вектор, що виходить з точки P, яка лежить в цьому полі. Через точку P проведемо площину, перпендикулярну вектору $\vec{n}^0$, і в цій площині розглянемо замкнений контур L, що оточує точку P. Додатний напрямок обходу контуру L відповідає напрямку нормалі $\vec{n}^0$, як це описано в п.2.7. Границю

$$\lim_{S\to 0}\left(\frac{1}{S}\oint_L \vec{a}\cdot d\vec{r}\right)$$

називають *щільністю циркуляції* векторного поля $\vec{a}$ в точці P за напрямком $\vec{n}^0$. Тут S – площа плоскої області, обмеженої контуром L, причому $S \to 0$ так, щоб цей контур стягувався б у точку P.

Щільність циркуляції векторного поля $\vec{a}$ в точці P за напрямком $\vec{n}^0$ характеризує обертальну здатність поля $\vec{a}$ в даній точці у напрямку $\vec{n}^0$. За різними напрямками, які виходять з цієї точки P, щільність циркуляції векторного поля $\vec{a}$ буде, взагалі кажучи, різною.

Означення. *Ротором (вихором) векторного поля $\vec{a}$ (позначається $\operatorname{rot}\vec{a}$) в точці P називається такий вектор, проекція якого на будь-який напрямок $\vec{n}^0$, що виходить з точки P, дорівнює щільності циркуляції поля $\vec{a}$ в точці P за напрямком $\vec{n}^0$.*

Теорема. *Нехай є векторне поле*

$$\vec{a} = a_x(x,y,z)\vec{i} + a_y(x,y,z)\vec{j} + a_z(x,y,z)\vec{k},$$

де функції $a_x(x,y,z)$, $a_y(x,y,z)$, $a_z(x,y,z)$ неперервні і мають неперервні частинні похідні першого порядку по всім змінним в будь-якій *точці. Тоді ротор векторного поля $\vec{a}$ існує в будь-якій точці і виражається формулою*

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

Ротор векторного поля $\vec{a}$ можна записати також у вигляді визначника

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}.$$

При обчисленні цього визначника під добутками

$$\frac{\partial}{\partial x}\cdot a_y,\ \frac{\partial}{\partial y}\cdot a_z,\ \frac{\partial}{\partial z}\cdot a_x,$$

і так далі, розуміють, відповідно, частинні похідні

$$\frac{\partial a_y}{\partial x},\ \frac{\partial a_z}{\partial y},\ \frac{\partial a_x}{\partial z}.$$

Застосовуючи формулу для обчислення ротора, наведену в теоремі, легко довести наступні властивості:

Властивість 1. $\operatorname{rot}\vec{C} = 0,$ де $\vec{C}-$ постійний вектор.

Властивість 2. $\operatorname{rot}(m\vec{a}) = m\operatorname{rot}\vec{a},$ де $m-$ постійне число.

Властивість 3. $\operatorname{rot}(\vec{a}+\vec{b}) = \operatorname{rot}\vec{a} + \operatorname{rot}\vec{b}$.

Властивість 4. $\operatorname{rot}(\varphi\vec{a}) = \varphi\operatorname{rot}\vec{a} + \operatorname{grad}\varphi \times \operatorname{rot}\vec{a},$ де $\varphi-$ скалярна диференційована функція, $\operatorname{grad}\varphi \times \operatorname{rot}\vec{a}-$ векторний добуток.

Властивість 5. $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\varphi) \equiv 0,$ тобто ротор потенціального поля завжди дорівнює нулю.

Властивість 6. $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\vec{a}) \equiv 0,$ тобто поле вектора $\mathrm{rot}\vec{a}$ є соленоїдальним.

Приклад 2.18. Обчислити ротор векторного поля

$$\vec{a} = yz\vec{i} + xyz\vec{j} + xy^2\vec{k}\ .$$

Розв'язання.

$$\mathrm{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ yz & xyz & xy^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial\left(xy^2\right)}{\partial y} - \frac{\partial\left(xyz\right)}{\partial z} \right)\vec{i} - \left(\frac{\partial\left(xy^2\right)}{\partial x} - \frac{\partial\left(yz\right)}{\partial z} \right)\vec{j} +$$

$$+ \left(\frac{\partial\left(xyz\right)}{\partial x} - \frac{\partial\left(yz\right)}{\partial y} \right)\vec{k} =$$

$$= xy\vec{i} - \left(y^2 - y\right)\vec{j} + \left(yz - z\right)\vec{k}.$$

Відповідь: $\mathrm{rot}\,\vec{a} = xy\vec{i} - \left(y^2 - y\right)\vec{j} + \left(yz - z\right)\vec{k}.$

Приклад 2.19. Обчислити ротор векторного поля

$$\vec{a} = xy^2z\vec{i} + xyz^2\vec{j} + x^2yz\vec{k}\ .$$

Розв'язання.

$$\operatorname{rot}\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ xy^2z & xyz^2 & x^2yz\end{vmatrix}=$$

$$=\left(\frac{\partial\left(x^2yz\right)}{\partial y}-\frac{\partial\left(xyz^2\right)}{\partial z}\right)\vec{i}-\left(\frac{\partial\left(x^2yz\right)}{\partial x}-\frac{\partial\left(xy^2z\right)}{\partial z}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial\left(xyz^2\right)}{\partial x}-\frac{\partial\left(xy^2z\right)}{\partial y}\right)\vec{k}=$$

$$=\left(x^2z-2xyz\right)\vec{i}-\left(2xyz-xy^2\right)\vec{j}+\left(yz^2-2xyz\right)\vec{k}.$$

Відповідь: $\operatorname{rot}\vec{a}=\left(x^2z-2xyz\right)\vec{i}-\left(2xyz-xy^2\right)\vec{j}+\left(yz^2-2xyz\right)\vec{k}.$

2.8. Теорема Стокса у векторній формі

Теорема Стокса. *Циркуляція векторного поля $\vec{a}$ по замкненому контуру L дорівнює потоку його ротора через довільну поверхню S, що лежить в векторному полі $\vec{a}$ і обмежена контуром L (напрямок обходу контуру погоджено з вибором сторони поверхні):*

$$\oint_L \vec{a}\cdot d\vec{r}=\iint_S \operatorname{rot}\vec{a}\cdot d\vec{S}.$$

Наслідок 1. *Потік ротора векторного поля $\vec{a}$ через будь-яку замкнуту поверхню, що лежить в цьому полі, дорівнює нулю.*

Наслідок 2. *Якщо в деякій частині векторного поля $\vec{a}$ $\operatorname{rot}\vec{a}\equiv 0$, то циркуляція вектора $\vec{a}$ по будь-якому замкненому контуру, який лежить в цій частині поля дорівнює нулю. Отже, вектор*

$\vec{a}$ *є градієнтом деякої скалярної функції* $U(M)$ *і векторне поле* $\vec{a}$ *є потенціальним.*

Якщо $\operatorname{div}\vec{a} \equiv 0$ і $\operatorname{rot}\vec{a} \equiv 0,$ то векторне поле $\vec{a}$ називається *гармонійним*.

Приклад 2.20. Довести, що векторне поле $\vec{a} = (y+z)\vec{i} + (x+z)\vec{j} + (x+y)\vec{k}$ є потенціальним і знайти його потенціал $U(x,y,z).$ Чи є це поле гармонійним?

Розв'язання.

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y+z & x+z & x+y \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial(x+y)}{\partial y} - \frac{\partial(x+z)}{\partial z} \right)\vec{i} - \left(\frac{\partial(x+y)}{\partial x} - \frac{\partial(y+z)}{\partial z} \right)\vec{j} +$$

$$+ \left(\frac{\partial(x+z)}{\partial x} - \frac{\partial(y+z)}{\partial y} \right)\vec{k} =$$

$$= (1-1)\vec{i} - (1-1)\vec{j} + (1-1)\vec{k} = (0,0,0).$$

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \frac{\partial(y+z)}{\partial x} + \frac{\partial(x+z)}{\partial y} + \frac{\partial(x+y)}{\partial z} \equiv 0.$$

Задане поле є гармонійним, так як $\operatorname{rot}\vec{a} \equiv 0$ і $\operatorname{div}\vec{a} \equiv 0.$ Потенціал поля $U(x,y,z)$ можна знайти двома способами.

1-й спосіб.

$$\vec{a} = \operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k},$$

тобто

$$\frac{\partial U}{\partial x} = y + z, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = x + z, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = x + y.$$

Тому

$$U(x, y, z) = \int (y + z)\,dx + \varphi(y, z) = yx + zx + \varphi(y, z),$$

де $\varphi(y, z) -$ невідома функція. Знаходячи звідси частинну похідну по y, отримуємо

$$x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} = x + z, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = z,$$

звідки

$$\varphi(y, z) = \int z\,dy + \psi(z) = zy + \psi(z), \; U(x, y, z) = yx + zx + zy + \psi(z),$$

де $\psi(z) -$ невідома функція. Знаходячи звідси частинну похідну по z, отримуємо

$$x + y + \psi'(z) = x + y, \; \psi'(z) = 0, \; \psi(z) = C,$$

де $C -$ довільна стала. Отже, $U(x, y, z) = xy + xz + yz + C.$

2-й спосіб. У потенціальному полі має місце рівність

$$\int_{AB} \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_{AB} dU = U(B) - U(A),$$

де $U(x,y,z)-$ потенціал векторного поля $\vec{a}$. Точка $A-$ фіксована точка поля, $B(x,y,z)-$ довільна точка поля, причому в цих точках векторне поле $\vec{a}$ повинно бути неперервним. Криву AB можна вибрати довільно. Виберемо в якості кривої AB ламану $AMNB$, де $A(0,0,0)$, $M(x,0,0)$, $N(x,y,0)$, $B(x,y,z)$, тобто відрізки AM, MN, NB паралельні осям координат. (Див. рисунок 2.5).

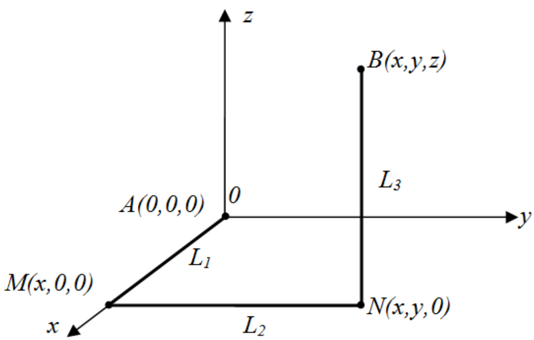

Рисунок 2.5

Позначимо L_1- відрізок AM, L_2- відрізок MN, L_3- відрізок NB. Тоді

$$U(B)-U(A)=\int\limits_{L_1}\vec{a}\cdot d\vec{r}+\int\limits_{L_2}\vec{a}\cdot d\vec{r}+\int\limits_{L_3}\vec{a}\cdot d\vec{r}.$$

Відрізки L_1, L_2, L_3 можна задати параметричними рівняннями:

$$L_1:\begin{cases}x=t,\\ y=0,\\ z=0,\end{cases}\quad \text{де}\quad 0\le t\le x;\qquad L_2:\begin{cases}x=x,\\ y=t,\\ z=0,\end{cases}\quad \text{де}\quad 0\le t\le y;$$

$$L_3: \begin{cases} x = x, \\ y = y, \quad \text{де} \quad 0 \le t \le z. \\ z = t, \end{cases}$$

На L_1 : $dx = dt,\ dy = 0,\ dz = 0;$ на L_2 : $dx = 0,\ dy = dt,\ dz = 0;$ на L_3 : $dx = 0,\ dy = 0,\ dz = dt.$

Звідси

$$U(x;y;z) - U(0,0,0) = \int_0^y x\,dt + \int_0^z (x+y)\,dt =$$

$$= xt\Big|_0^y + (x+y)t\Big|_0^z = xy + (x+y)z.$$

тому $U(x,y,z) = xy + xz + yz + C,$ де $C -$ довільна стала.

Відповідь: Задане поле є гармонійним. $U(x,y,z) = xy + xz + yz + C,$ де $C -$ довільна стала.

Приклад 2.21. Довести, що векторне поле $\vec{a} = (y^2 + z^2)\vec{i} + (2xy + z)\vec{j} + (y + 2xz)\vec{k}$ є потенціальним і знайти його потенціал $U(x,y,z)$. Чи є це поле гармонійним?

Розв'язання.

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2 + z^2 & 2xy + z & y + 2xz \end{vmatrix} =$$

$$=\left(\frac{\partial\left(y+2xz\right)}{\partial y}-\frac{\partial\left(2xy+z\right)}{\partial z}\right)\vec{i}\,-$$

$$-\left(\frac{\partial\left(y+2xz\right)}{\partial x}-\frac{\partial\left(y^2+z^2\right)}{\partial z}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial\left(2xy+z\right)}{\partial x}-\frac{\partial\left(y^2+z^2\right)}{\partial y}\right)\vec{k}=$$

$$=\left(1-1\right)\vec{i}-\left(1-1\right)\vec{j}+\left(1-1\right)\vec{k}=\left(0,0,0\right).$$

$$\mathrm{div}\vec{a}=\frac{\partial\left(y^2+z^2\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(2xy+z\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(y+2xz\right)}{\partial z}=4x\neq 0,$$

якщо $x\neq 0$. Задане поле є потенціальним, але не є соленоїдальним, отже, воно не є гармонійним.

Шукаємо потенціал $U\left(x,y,z\right)$.

1-й спосіб.

$$\vec{a}=\mathrm{grad}U=\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\vec{k},$$

тобто

$$\frac{\partial U}{\partial x}=y^2+z^2,\ \ \frac{\partial U}{\partial y}=2xy+z,\ \ \frac{\partial U}{\partial z}=y+2xz.$$

Тому

$$U\left(x,y,z\right)=\int\left(y^2+z^2\right)dx+\varphi\left(y,z\right)=(y^2+z^2)x+\varphi\left(y,z\right),$$

де $\varphi\left(y,z\right)-$ невідома функція. Обчислюючи тут частинну похідну по y, отримуємо

$$2xy+\frac{\partial\varphi}{\partial y}=2xy+z,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=z,$$

звідки

$$\varphi(y,z)=\int zdy+\psi(z)=zy+\psi(z),\ U(x,y,z)=(y^2+z^2)x+zy+\psi(z)$$

де $\psi(z)-$ невідома функція. Знаходячи частинну похідну по z, отримуємо

$$2xz+y+\psi'(z)=2xz+y,\ \ \psi'(z)=0,\ \ \psi(z)=C,$$

де $C-$ довільна стала. Отже

$$U(x,y,z)=x(y^2+z^2)+yz+C.$$

2-й спосіб. (Див. рисунок 2.5). Діючи так само, як в прикладі 2.20, отримуємо

$$U(x;y;z)-U(0,0,0)=\int_0^y 2xtdt+\int_0^z (y+2xt)dt=$$

$$=2x\frac{t^2}{2}\Big|_0^y+\left(yt+2x\frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^z=xy^2+yz+xz^2.$$

тому $U(x,y,z)=x(y^2+z^2)+yz+C,$ де $C-$ довільна стала.

Відповідь: Задане поле є потенціальним, але не є гармонійним. $U(x,y,z)=x(y^2+z^2)+yz+C,$ де $C-$ довільна стала.

Приклад 2.22. Довести, що поле вектора

$$\vec{a}=\left(\frac{1}{z}-\frac{y}{x^2}\right)\vec{i}+\left(\frac{1}{x}-\frac{z}{y^2}\right)\vec{j}+\left(\frac{1}{y}-\frac{x}{z^2}\right)\vec{k}$$

є потенціальним і знайти його потенціал $U(x,y,z)$. Чи є це поле гармонійним?

Розв'язання.

$$\operatorname{rot}\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ \dfrac{1}{z}-\dfrac{y}{x^2} & \dfrac{1}{x}-\dfrac{z}{y^2} & \dfrac{1}{y}-\dfrac{x}{z^2}\end{vmatrix}=$$

$$=\left(\frac{\partial\left(\dfrac{1}{y}-\dfrac{x}{z^2}\right)}{\partial y}-\frac{\partial\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{z}{y^2}\right)}{\partial z}\right)\vec{i}-\left(\frac{\partial\left(\dfrac{1}{y}-\dfrac{x}{z^2}\right)}{\partial x}-\frac{\partial\left(\dfrac{1}{z}-\dfrac{y}{x^2}\right)}{\partial z}\right)\vec{j}+$$

$$+\left(\frac{\partial\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{z}{y^2}\right)}{\partial x}-\frac{\partial\left(\dfrac{1}{z}-\dfrac{y}{x^2}\right)}{\partial y}\right)\vec{k}=$$

$$=\left(-\frac{1}{y^2}+\frac{1}{y^2}\right)\vec{i}-\left(-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^2}\right)\vec{j}+\left(-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)\vec{k}=(0,0,0).$$

$$\operatorname{div}\vec{a}=\frac{\partial\left(\dfrac{1}{z}-\dfrac{y}{x^2}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{z}{y^2}\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(\dfrac{1}{y}-\dfrac{x}{z^2}\right)}{\partial z}=\frac{2y}{x^3}+\frac{2z}{y^3}+\frac{2x}{z^3}.$$

Задане поле є потенціальним, але не є гармонійним. Знайдемо потенціал $U(x,y,z)$.

1-й спосіб. Так само, як в завданні 2.20, отримуємо

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{1}{z}-\frac{y}{x^2},\ \ \frac{\partial U}{\partial y}=\frac{1}{x}-\frac{z}{y^2},\ \ \frac{\partial U}{\partial z}=\frac{1}{y}-\frac{x}{z^2}.$$

Звідси

$$U(x,y,z)=\int\left(\frac{1}{z}-\frac{y}{x^2}\right)dx+\varphi(y,z)=\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\varphi(y,z),$$

де $\varphi(y,z)-$ невідома функція. Знаходячи звідси частинну похідну по $y,$ отримаємо

$$\frac{1}{x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{1}{x}-\frac{z}{y^2},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{z}{y^2},$$

звідки

$$\varphi(y,z)=\int\left(-\frac{z}{y^2}\right)dy+\psi(z)=\frac{z}{y}+\psi(z),$$

$$U(x,y,z)=\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\psi(z),$$

де $\psi(z)-$ невідома функція. Знаходячи звідси частинну похідну по $z,$ отримаємо

$$-\frac{x}{z^2}+\frac{1}{y}+\psi'(z)=\frac{1}{y}-\frac{x}{z^2},\ \ \psi'(z)=0,\ \ \psi(z)=C,$$

де $C-$ довільна стала. Отже,

$$U(x,y,z)=\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+C.$$

2-й спосіб. Будемо діяти так само, як в прикладі 2.20. Але ми не можемо взяти в якості точки A початок координат, так як в ньому поле не є неперервним. Тому вибираємо точки $A(1,1,1)$, $M(x,1,1)$, $N(x,y,1)$, $B(x,y,z)$. (Див. рисунок 2.6).

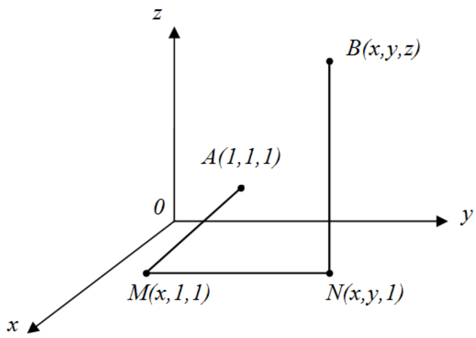

Рисунок 2.6

Тоді

$$U(x,y,z)-U(1,1,1)=$$

$$=\int_1^x\left(1-\frac{1}{t^2}\right)dt+\int_1^y\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{t^2}\right)dt+\int_1^z\left(\frac{1}{y}-\frac{x}{t^2}\right)dt=$$

$$=\left(t+\frac{1}{t}\right)\Bigg|_1^x+\left(\frac{t}{x}+\frac{1}{t}\right)\Bigg|_1^y+\left(\frac{t}{y}+\frac{x}{t}\right)\Bigg|_1^z=\left(x+\frac{1}{x}-1-1\right)+\left(\frac{y}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{x}-1\right)+$$

$$+\left(\frac{z}{y}+\frac{x}{z}-\frac{1}{y}-x\right)=\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}-3.$$

Звідси

$$U(x;y;z)=\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}+C,$$

де $C-$ довільна стала.

Відповідь: Задане поле не є гармонійним, але є потенціальним. $U(x;y;z)=\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}+C,$ де $C-$ довільна стала.

Приклад 2.23. Знайти циркуляцію *Ц* векторного поля $\vec{a}=y\vec{i}-x\vec{j}+e^{xy}\vec{k}$ вздовж еліпса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad z=0.$$

Обхід еліпса відбувається проти годинникової стрілки. (Див. рисунок 2.7).

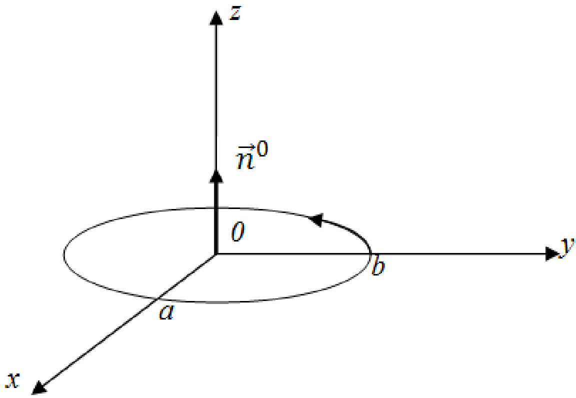

Рисунок 2.7

Розв'язання. Користуючись теоремою Стокса, можемо написати

$$Ц=\oint_L \vec{a}\cdot d\vec{r}=\iint_S \operatorname{rot}\vec{a}\cdot d\vec{S}.$$

Оскільки, $\vec{a}=y\vec{i}-x\vec{j}+e^{xy}\vec{k}$ то

$$\operatorname{rot}\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y & -x & e^{xy}\end{vmatrix}=xe^{xy}\vec{i}-ye^{xy}\vec{j}-2\vec{k}\,.$$

Контур $L-$ заданий еліпс За поверхню S приймемо частину площини $XOY,$ обмежену цим еліпсом. Орт вектора нормалі до площини XOY , напрямок якого погоджено з напрямком обходу контуру, є вектор $\vec{n}^0=(0,0,1).$ В даному випадку обчислення поверхневого інтегралу другого роду зводиться до обчислення поверхневого інтегралу першого роду (див. приклад 2.7). Так як $\operatorname{rot}\vec{a}\cdot\vec{n}^0=-2,$ то

$$\iint\limits_S \operatorname{rot}\vec{a}\cdot d\vec{S}=\iint\limits_S\left(\operatorname{rot}\vec{a}\cdot\vec{n}^0\right)dS=-2\iint\limits_S dS=-2S_{элл.}=-2\pi ab.$$

Тут $S_{элл.}=\pi ab-$ площа частини площини $XOY,$ що обмежена еліпсом.

Відповідь: $Ц=-2\pi ab.$

Приклад 2.24. Знайти циркуляцію $Ц$ векторного поля $\vec{a}=(3x+5z)\vec{i}+(x+4y)\vec{j}+(6x-z)\vec{k}$ вздовж орієнтованої замкнутої ламаної $ABCA,$ де $A(2,0,0),$ $B(0,2,0),$ $C(0,0,2)$. (Див. рисунок 2.8).

Розв'язання. По теоремі Стокса

$$Ц=\oint\limits_L \vec{a}\cdot d\vec{r}=\iint\limits_S \operatorname{rot}\vec{a}\cdot d\vec{S}.$$

Оскільки $\vec{a}=(3x+5z)\vec{i}+(x+4y)\vec{j}+(6x-z)\vec{k},$ то

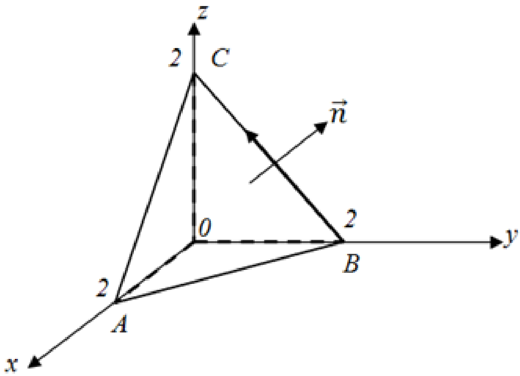

Рисунок 2.8

$$\operatorname{rot}\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 3x+5z & x+4y & 6x-z\end{vmatrix}=-\vec{j}+\vec{k}=(0,-1,1).$$

Контур $L-$ це контур трикутника ABC.

За поверхню S, обмежену контуром L, приймемо сам трикутник ABC, якій лежить в площині, що проходить через точки A, B, C. Рівняння цієї площини можна записати у вигляді

$$\begin{vmatrix}x-2 & y & z\\ -2 & 2 & 0\\ -2 & 0 & 2\end{vmatrix}=0.$$

Обчислюючи визначник і виконуючи необхідні перетворення, отримуємо наступне рівняння шуканої площини: $x+y+z-2=0$. Вектор нормалі, напрямок якого погоджено з напрямком обходу контуру, дорівнює $\vec{n}=(1,1,1)$, а його орт

$$\vec{n}^0 = \frac{1}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$

В даному випадку обчислення поверхневого інтегралу другого роду зводиться до обчислення поверхневого інтегралу першого роду (див. приклад 2.7) і, так як

$$\operatorname{rot}\vec{a} \cdot \vec{n}^0 = (0,-1,1) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = 0,$$

то

$$\iint_S \operatorname{rot}\vec{a} \cdot d\vec{S} = \iint_S \left(\operatorname{rot}\vec{a} \cdot \vec{n}^0 \right) dS = 0.$$

Відповідь: $Ц = 0.$

Приклад 2.25. Знайти циркуляцію $Ц$ векторного поля $\vec{a} = (x-2z)\vec{i} + (3x+y)\vec{j} + (y-2z)\vec{k}$ вздовж орієнтованої замкнутої ламаної $ABCA$, де $A(3,1,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,1,2)$. (Див. рисунок 2.9).

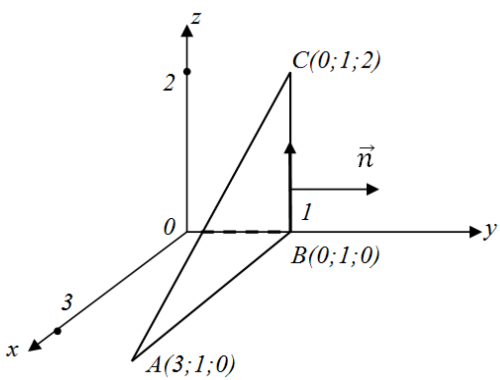

Рисунок 2.9

Розв'язання. По теоремі Стокса

$$\oint_L \vec{a}\cdot d\vec{r} = \iint_S \operatorname{rot}\vec{a}\cdot d\vec{S}.$$

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x-2z & 3x+y & y-2z \end{vmatrix} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k} = (1,-2,3).$$

Контур $L-$ це контур трикутника ABC. За поверхню S, обмежену контуром L, приймемо сам трикутник ABC, якій лежить в площині, що проходить через точки A, B, C. Орт вектора, напрям якого погоджено з напрямком обходу контуру, є вектор $\vec{n}^0 = (0;1;0)$. У даному випадку обчислення поверхневого інтегралу другого роду зводиться до обчислення поверхневого інтегралу першого роду. Так як

$$\operatorname{rot}\vec{a}\cdot\vec{n}^0 = (1,-2,3)\cdot(0,1,0) = -2,$$

то

$$\iint_S \operatorname{rot}\vec{a}\cdot d\vec{S} = \iint_S \left(\operatorname{rot}\vec{a}\cdot\vec{n}^0\right)dS = -2\iint_S dS = -2S_{\triangle ABC} = -6.$$

Відповідь: $Ц = -6.$

Приклад 2.26. Знайти циркуляцію $Ц$ векторного поля $\vec{a} = x\vec{i} + z\vec{j} - y\vec{k}$ вздовж лінії перетину частини поверхні $(x-1)^2 = y^2 + z^2$, що лежить в першому октанті, з площинами координат в напрямку від точки перетину поверхні з віссю Ox до точки перетину поверхні з віссю Oy. (Див. рисунок 2.10).

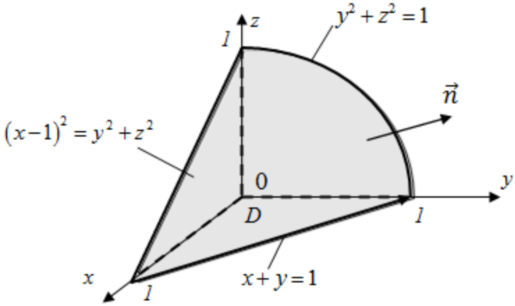

Рисунок 2.10

Розв'язання. По теоремі Стокса

$$\oint_L \vec{a}\cdot d\vec{r} = \iint_S \operatorname{rot}\vec{a}\cdot d\vec{S}.$$

Тут контур L – це лінія перетину частини поверхні $(x-1)^2 = y^2+z^2$, що лежить в першому октанті, з площинами координат. За поверхню S, обмежену контуром L, приймемо зазначену частину поверхні $(x-1)^2 = y^2+z^2$.

Обчислимо

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x & z & -y \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 0\vec{j} + 0\vec{k} = (-2, 0, 0).$$

Рівняння поверхні можна записати у вигляді $(x-1)^2 - y^2 - z^2 = 0$. Вектор нормалі до цієї поверхні, напрямок якого погоджено з напрямком обходу контуру, дорівнює $\vec{n} = (1-x, y, z)$ (див. приклад 2.7), а його орт

$$\vec{n}^0 = \frac{1}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{(1-x)^2 + y^2 + z^2}} (1-x, y, z).$$

$$\mathrm{rot}\vec{a} \cdot \vec{n}^0 = \frac{2(x-1)}{\sqrt{(1-x)^2 + y^2 + z^2}} .$$

Далі обчислення поверхневого інтегралу другого роду зводимо до обчислення поверхневого інтегралу першого роду:

$$\iint_S \mathrm{rot}\vec{a} \cdot d\vec{S} = \iint_S \left(\mathrm{rot}\vec{a} \cdot \vec{n}^0\right) dS = \iint_S \frac{2(x-1)}{\sqrt{(1-x)^2 + y^2 + z^2}} dS.$$

Останній інтеграл можна звести до подвійного інтеграла по області D, яка є проекцією поверхні S на площину XOY. Для цього рівняння поверхні S перепишемо у вигляді $z = \sqrt{(x-1)^2 - y^2}$ і обчислимо

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dxdy =$$

$$= \sqrt{1 + \left(\frac{2(x-1)}{2\sqrt{(x-1)^2 - y^2}}\right)^2 + \left(\frac{-2y}{2\sqrt{(x-1)^2 - y^2}}\right)^2} dxdy =$$

$$= \frac{\sqrt{2}(x-1)}{\sqrt{(x-1)^2 - y^2}} dxdy.$$

Тоді

$$\iint\limits_{S} \frac{2(x-1)}{\sqrt{(1-x)^2+y^2+z^2}}\,dS =$$

$$= \iint\limits_{D} \frac{2(x-1)}{\sqrt{(1-x)^2+y^2+(x-1)^2-y^2}} \cdot \frac{\sqrt{2}\,(x-1)}{\sqrt{(x-1)^2-y^2}}\,dxdy =$$

$$= \iint\limits_{D} \frac{2(x-1)}{\sqrt{(x-1)^2-y^2}}\,dxdy = \int_0^1 dy \int_0^{1-y} \frac{2(x-1)}{\sqrt{(x-1)^2-y^2}}\,dx =$$

$$= \int_0^1 2\sqrt{(x-1)^2-y^2}\,\Bigg|_0^{1-y} dy =$$

$$= -2\int_0^1 \sqrt{1-y^2}\,dy = \left| \begin{matrix} y=\sin t, \\ dy=\cos t dt, \\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2} \end{matrix} \right| =$$

$$= -2\int_0^1 \sqrt{1-y^2}\,dy = \left| \begin{matrix} y=\sin t, \\ dy=\cos t dt, \\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2} \end{matrix} \right| =$$

$$= -2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = -2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = -\frac{\pi}{2}.$$

Відповідь: $Ц = -\frac{\pi}{2}.$

КОНТРОЛЬНА РОБОТА ПО ТЕМІ «ТЕОРІЯ ПОЛЯ»

Варіант 1

1. Знайти похідну скалярного поля $U(x,y,z)=x^3+2xy-z^2+xz+y^2$ в точці $M(-1,2,1)$ у напрямку до точки $N(-3,1,4)$.

2. Знайти потік векторного поля

$$\vec{a}(x,y,z)=(2x+3yz)\vec{i}+\left(x^2+5y+xz\right)\vec{j}+(xy-2z+6)\vec{k}$$

через повну поверхню трикутної піраміди, вершини якої розташовані в точках $O(0,0,0)$, $A(2,0,0)$, $B(0,3,0)$, $C(0,0,5)$.

3. Довести, що векторне поле

$$\vec{a}=\left(2xy+z^2\right)\vec{i}+\left(x^2+6y\right)\vec{j}+2xz\vec{k}$$

є потенційним і знайти його потенціал.

4. Знайти циркуляцію векторного поля

$$\vec{a}=(2x-z)\vec{i}+(x+2y)\vec{j}+(3y+z)\vec{k}$$

вздовж орієнтованої замкнутої ламаної $ABCA$, де $A(1;0;1)$, $B(0;2;1)$, $C(0;0;1)$.

Варіант 2

1. Знайти похідну скалярного поля $U(x,y,z)=y^3-x^2y+yz-xz$ в точці $M(3,2,-1)$ у напрямку, що утворює з осями координат кути $\alpha=30^{\circ}$, $\beta=120^{\circ}$, $\gamma=90^{\circ}$.

2. Знайти потік векторного поля

$$\vec{a}(x,y,z)=(2x+yz)\vec{i}+(3y+xz)\vec{j}+(xy-2z)\vec{k}$$

через повну поверхню прямого кругового конуса, основа якого лежить на площині $z=0$, а вісь - на осі Oz. Вершина конуса розташована в точці $(0,0,4)$, а радіус основи дорівнює 2.

3. Довести, що векторне поле

$$\vec{a}(x,y,z)=\left(y^2+yz\right)\vec{i}+\left(2xy+xz\right)\vec{j}+\left(xy+3z^2\right)\vec{k}$$

є потенційним і знайти його потенціал.

4. Знайти циркуляцію векторного поля

$$\vec{a}=\left(x-5y\right)\vec{i}+\left(2y+3z\right)\vec{j}+\left(5x+z\right)\vec{k}$$

вздовж кола $x^2+y^2=4$. Обхід кола відбувається проти годинникової стрілки.

Варіант 3

1. Знайти похідну скалярного поля $U(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-xy-yz$ в точці $M(2,1,-3)$ у напрямку радіус-вектору цієї точки.

2. Знайти потік векторного поля

$$\vec{a}(x,y,z)=\left(-3x+y^2+z^2\right)\vec{i}+\left(2x^2+4y+xz\right)\vec{j}+\left(2xy-5z\right)\vec{k}$$

через замкнену поверхню, утворену сферою $x^2+y^2+z^2=9$, площинами $x=0$, $y=0$, $z=0$ і лежить в першому октанті.

3. Довести, що векторне поле

$$\vec{a}=\left(2x+2yz\right)\vec{i}+\left(2xz+z\right)\vec{j}+\left(2xy+y\right)\vec{k}$$

є потенційним і знайти його потенціал.

4. Знайти циркуляцію векторного поля

$$\vec{a}=\left(3y-2z\right)\vec{i}+\left(x+4y\right)\vec{j}+\left(z-4x\right)\vec{k}$$

вздовж орієнтованої замкнутої ламаної *ABCDA*, де $A(2;0;5),\ B(2;3;5),\ C(0;3;5),\ D(0;0;5).$

Варіант 4

1.Найти похідну скалярного поля $U(x,y,z)=3x+4x^2z-5xy+yz$ в точці $M(4,1,-2)$ у напрямку до точки $N(3,0,-5)$.

2. Знайти потік векторного поля

$$\vec{a}(x,y,z)=(2x+y^2)\vec{i}+(3y+z)\vec{j}+\left(z-x^3\right)\vec{k}$$

через повну поверхню піраміди, що обмежена площинами $x+y+z=4,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$

3. Довести, що векторне поле

$$\vec{a}=(3y+2z)\vec{i}+(3x-6yz)\vec{j}+\left(2x-3y^2\right)\vec{k}$$

є потенційним і знайти його потенціал.

4. Знайти циркуляцію векторного поля

$$\vec{a}=(3z-x)\vec{i}+(2x+3y)\vec{j}+(4y-z)\vec{k}$$

вздовж орієнтованої замкнутої ламаної *AOCA*, де $A(3;0;0),\ O(0;0;0),\ C(0;0;6)$.

Варіант 5

1. Знайти похідну скалярного поля $U(x,y,z)=y^2z-yz^2+2xyz+3x$ в точці $M(-1,2,-2)$ у напрямку, що утворює з осями координат кути $\alpha=60^{\circ},\ \beta=45^{\circ},\ \gamma=120^{\circ}.$

2. Знайти потік векторного поля

$$\vec{a}(x,y,z)=\left(3x-y^2\right)\vec{i}+\left(x^2+y-2z\right)\vec{j}+\left(y^3+2z\right)\vec{k}$$

через повну поверхню циліндра $x^2 + y^2 = 2,\ 0 \le z \le 4.$

3. Довести, що векторне поле

$$\vec{a} = (4xy - 3yz)\vec{i} + \left(2x^2 + 2yz - 3xz\right)\vec{j} + \left(y^2 - 3xy\right)\vec{k}$$

є потенційним і знайти його потенціал.

4. Знайти циркуляцію векторного поля

$$\vec{a} = (3z - 2x)\vec{i} + (x - 3y)\vec{j} + (z + 2y)\vec{k}$$

вздовж еліпса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$ Обхід еліпса відбувається проти годинникової стрілки.

Варіант 6

1. Знайти похідну скалярного поля $U(x, y, z) = x^3 + z^3 + xyz + y^2 - 3z$ в точці $M(-3, 5, 4)$ у напрямку радіус-вектора цієї точки.

2. Знайти потік векторного поля

$$\vec{a}(x, y, z) = (5x + 2y + z)\vec{i} + \left(x^2 - y + 2z\right)\vec{j} + (x + 2y - z)\vec{k}$$

через повну поверхню сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$

3. Довести, що векторне поле

$$\vec{a} = \left(6xy - z^2\right)\vec{i} + \left(3x^2 + 2yz\right)\vec{j} + \left(y^2 - 2xz\right)\vec{k}$$

є потенційним і знайти його потенціал.

4. Знайти циркуляцію векторного поля

$\vec{a} = (2z - x)\vec{i} + (y + 3z)\vec{j} + (2x + 4y)\vec{k}$ вздовж орієнтованої замкнутої ламаної $ABCA$, де $A(0;-1;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;1)$.

Відповіді.

Варіант 1.

1. $\frac{\partial U(M)}{\partial s}=-\frac{27}{\sqrt{14}}$. 2. $\Pi=18\pi$.

3. $U(x,y,z)=x^2y+xz^2+3y^2+C$. 4. $Ц=1$.

Варіант.2.

1. $\frac{\partial U(M)}{\partial s}=-\frac{11\sqrt{3}+2}{2}$. 2. $\Pi=16\pi$.

3. $U(x,y,z)=xy^2+xyz+z^3+C$. 4. $Ц=20\pi$.

Варіант 3.

1. $\frac{\partial U(M)}{\partial s}=\frac{30}{\sqrt{14}}$. 2. $\Pi=-18\pi$.

3. $U(x,y,z)=x^2+2xyz+yz+C$. 4. $Ц=-12$.

Варіант 4.

1. $\frac{\partial U(M)}{\partial s}=-\frac{107}{\sqrt{11}}$. 2. $\Pi=64$.

3. $U(x,y,z)=3xy+2xz-3y^2z+C$. 4. $Ц=27$.

Варіант 5.

1. $\frac{\partial U(M)}{\partial s}=-\frac{13+12\sqrt{2}}{2}$. 2. $\Pi=48\pi$.

3. $U(x,y,z)=2x^2y-3xyz+y^2z+C$. 4. $Ц=20\pi$.

Варіант 6.

1. $\frac{\partial U(M)}{\partial s}=-\frac{19}{5\sqrt{2}}$. 2. $\Pi=4\pi R^3$.

3. $U(x,y,z)=3x^2y-xz^2+y^2z+C$. 4. $Ц=\frac{1}{2}$.

ТАБЛИЦЯ ІНТЕГРАЛІВ

1. $\int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1).$

2. $\int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C.$

3. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C.$

4. $\int e^u du = e^u + C.$

5. $\int \sin u du = -\cos u + C.$

6. $\int \cos u du = \sin u + C.$

7. $\int \mathrm{tg}\, u du = -\ln|\cos u| + C.$

8. $\int \mathrm{ctg}\, u du = \ln|\sin u| + C.$

9. $\int \frac{1}{\cos^2 u} du = \mathrm{tg}\, u + C.$

10. $\int \frac{1}{\sin^2 u} du = -\mathrm{ctg}\, u + C.$

11. $\int \mathrm{sh}\, u du = \mathrm{ch}\, u + C.$

12. $\int \mathrm{ch}\, u du = \mathrm{sh}\, u + C.$

13. $\int \mathrm{th}\, u du = \ln|\mathrm{ch}\, u| + C.$

14. $\int \mathrm{cth}\, u du = \ln|\mathrm{sh}\, u| + C.$

15. $\int \frac{1}{\mathrm{ch}^2 u} du = \mathrm{th}\, u + C.$

16. $\int \frac{1}{\mathrm{sh}^2 u} du = -\mathrm{cth}\, u + C.$

17. $\int \frac{1}{a^2 + u^2} du = \frac{1}{a} \mathrm{arctg} \frac{u}{a} + C.$

18. $\int \frac{1}{a^2 - u^2} du = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right| + C.$

19. $\int \frac{1}{u^2 - a^2} du = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C.$

20. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - u^2}} du = \arcsin \frac{u}{a} + C.$

21. $\int \frac{1}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} du = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C.$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Высшая математика в примерах и задачах Т. 2./ Под ред. Ю.Л. Геворкяна. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2005. – 412с.
2. Геворкян Ю.Л. Краткий курс высшей математики / Геворкян Ю.Л., Григорьев А.Л., Чикина Н.А. – Ч.2.Харьков: НТУ «ХПІ», 2011. – 476с.
3. Вища математика в прикладах і задачах. – Т.2./ Під ред. Л.В. Курпи. Харків: НТУ «ХПІ», 2009.- 432с.
4. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. – М.: Наука, 1972, 1985. – Т.2.
5. Берман Г.Н. Сборник задач по математическому анализу. – М.:Наука, 1977. –416с.

ЗМІСТ

Навчальне видання

ПОЛЯНСЬКА Тетяна Семенівна
ЧОРНА Олена Сергіївна

ТЕОРІЯ ПОЛЯ

Навчально-методичний посібник з курсу вищої математики
для студентів технічних спеціальностей НТУ «ХПІ»

Відповідальний за випуск проф. Ю.Л.Геворкян
Роботу до видання рекомендувала проф. Л.В.Курпа

В авторській редакції

План 2019 р., поз. 134

Підп. до друку 20.12.2019 р. Формат 60x84 1/16. Папір офсетний.
Друк – цифровий. Гарнітура Times New Roman. Ум. друк. арк. 3,8
Наклад 50 прим. Зам. № 15/12. Ціна договірна.

Видавничий центр НТУ “ХПІ”.
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК №3657 від 24.12.2009 р.
61002, Харків, вул. Кирпичова, 2

Видавець: ФОП Панов А.М.
Свідоцтво серії ДК №4847 від 06.02.2015 р.
м. Харків, вул. Жон Мироносиць 10, оф. 6,
тел. +38(057)714-06-74, +38(050)976-32-87
copy@vlavke.com.